SISTEMAS DE LÓGICA DIFUSA Y APLICACIÓN

por

MARISOL CERISOLA

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. MARÍA LORENA BERGAMINI

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA

JUNIO 2021

SISTEMAS DE LÓGICA DIFUSA Y APLICACIÓN

La lógica aristotélica no admite imprecisiones en la verdad. Sin embargo, en la práctica, es necesario equilibrar la precisión que buscamos con la incertidumbre que existe. La mayoría de los textos de ingeniería no abordan la incertidumbre en la información, los modelos y las soluciones que se transmiten dentro de los problemas abordados en el mismo. En esta tesis se estudiarán métodos para manejar una de estas formas de incertidumbre en nuestros problemas técnicos, la llamada lógica difusa.

LA IMPRECISIÓN

Nuestra comprensión de la mayoría de los procesos físicos se basa en gran medida en un razonamiento humano impreciso. Sin embargo esta imprecisión es una forma de información que puede ser muy útil para todos. La capacidad de incrustar tal razonamiento en problemas hasta ahora insolubles y complejos es el criterio por el cual se juzga la eficacia de la lógica difusa. Sin duda, esta capacidad no puede resolver problemas que requieren precisión, por ejemplo cómo disparar rayos láser de precisión en decenas de kilómetros en el espacio. El impacto de la lógica difusa en estas áreas podría tardar años, si es que llega a ocurrir. Pero no muchos problemas humanos requieren esa precisión, por ejemplo: problemas como estacionar un vehículo, retroceder una grúa, lavar la ropa, analizar a los clientes de un Banco para evaluar su rentabilidad.

Al considerar el uso de lógica difusa para un problema dado, un ingeniero o científico debe considerar la necesidad de explotar la tolerancia a la imprecisión. La alta precisión no solo impone altos costos, sino que también implica una baja posibilidad de encontrar la solución en un problema.

En los algoritmos que utilizan lógica difusa, por lo tanto, la respuesta exacta no está garantizada pero se puede lograr una respuesta óptima: la optimización se mide como un porcentaje de imprecisión, con 0% representando la respuesta exacta y porcentajes de imprecisiones mayores que cero representando respuestas de menor precisión. ¿Pueden los humanos vivir con un poco menos de precisión? La respuesta a esta pregunta depende de la situación, pero para la gran mayoría de los problemas que enfrentamos todos los días, la respuesta es un rotundo sí.

Para poder aplicar la lógica difusa en el último capítulo, se estudia el diseño de sistemas difusos. Estos sistemas mapean un grupo de entrada a un grupo de salida, los cuales pueden ser proposiciones lingüísticas u otras formas de información difusa. En los próximos años los sistemas difusos serán cada vez más populares como esquemas de solución. Contienen todo lo que el álgebra tiene para ofrecer, y más, porque pueden manejar todo tipo de información, no solo cantidades numéricas. El beneficio principal de la teoría de sistemas difusos es aproximar el comportamiento del sistema donde no existen funciones analíticas o relaciones numéricas.

Los sistemas difusos son muy útiles en dos contextos generales: (1) en situaciones que involucran sistemas muy complejos cuyos comportamientos no se comprenden bien, y (2) en situaciones en las que se justifica una solución aproximada, pero rápida.

INCERTIDUMBRE E INFORMACIÓN

Existe una incertidumbre para realizar mediciones adecuadas y además, por ejemplo, la ambigüedad de nuestro lenguaje. Los conjuntos difusos proporcionan una forma matemática de representar la falta de claridad en los sistemas humanos. Por ejemplo, supongamos que le queremos enseñar a un nene a hornear galletas y darle instrucciones sobre cuándo sacarlas del horno. Podríamos decirle que las saque cuando la temperatura dentro de la masa para galletas alcance los 190°C, o bien podríamos aconsejarle que las saque cuando la parte superior de las galletas se ponga de color marrón claro. Lo más probable es que utilicemos la segunda opción. La primera instrucción es demasiado precisa para implementarla prácticamente; no es útil. El término vago marrón claro es útil en este contexto y puede ser utilizado incluso por un niño. Por lo tanto, nuestros sofisticados métodos computacionales deberían poder representar y manipular una variedad de incertidumbres debidas a la ambigüedad, la falta de especificidad, las creencias y la ignorancia.

TEORÍA DE CONJUNTOS DIFUSOS

Definir la pertenencia a un conjunto es clave para la toma de decisiones cuando se enfrenta a la incertidumbre.

Por ejemplo, podemos evaluar fácilmente si alguien mide más de 1,80 m. de altura. Si "alto " es un conjunto definido como alturas iguales o superiores a 1,80 m., la computadora no reconocería a un individuo de altura 1,79 m. como "alto ". Pero la "altura" es una cuestión de grado y es relativa. Por ejemplo, un hombre de 1,79 m entre los aztecas se consideraría altísimo. En el mundo real (difuso) el conjunto de personas altas puede superponerse con el conjunto de personas no altas. Este grado de pertenencia a un conjunto, entonces, es fundamental para la definición de elementos de un universo. Los conjuntos ordinarios contienen objetos que satisfacen propiedades necesarias de pertenencia; los conjuntos difusos contienen objetos que satisfacen propiedades imprecisas de pertenencia, es decir, la pertenencia de un objeto en un conjunto difuso puede ser aproximada.

Otro ejemplo puede darse en una entidad bancaria, donde queremos evaluar a clientes con “excelente reputación”, definir “cliente con grandes inversiones”, “antiguos”, etc.

1.1 ¿QUÉ SON LOS CONJUNTOS BORROSOS?

Un conjunto difuso o borroso es un conjunto que contiene elementos con diversos grados de pertenencia. Esta idea contrasta con los conjuntos ordinarios porque sus elementos solo pertenecen a ellos si su grado de pertenencia es total en ese conjunto (es decir, se le asigna un grado de valor 1). Los elementos de un conjunto difuso, debido a que no es necesario que su pertenencia sea completa, también podrían ser elementos de otros conjuntos difusos del mismo universo.

Un conjunto difuso en un universo E es un conjunto que puede contener elementos de forma parcial, es decir que la propiedad de que un elemento x pertenezca al conjunto A $(x \in A)$ puede ser cierta con un grado parcial de verdad. Este grado de pertenencia de x a A se mide con una función de pertenencia

$$\mu_A(x): E \rightarrow [0,1]$$

Si el valor de esta función es 0, x no pertenece a A. Si es 1, entonces x pertenece a A totalmente, y si $0 < \mu_A(x) < 1$ entonces x pertenece a A de una manera parcial.

Para conjuntos ordinarios, se define la función de pertenencia como

$$\mu_A(x): E \rightarrow \{0,1\}$$

donde $\mu_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $\mu_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

El conjunto vacío (notado $\emptyset$) es el conjunto ordinario tal que para todo x_i del universo E, $\mu_\emptyset(x_i) = 0$.

El conjunto de referencia o universal (denotado E) es el conjunto ordinario tal que para todo x_i del universo $E, \mu_E(x_i) = 1$.

De esta manera, podemos denotar a un subconjunto borroso $A \subset E$ $A = \{x_i | \mu_A(x_i);\ x_i \in E\}$. Por ejemplo, al subconjunto borroso A en el conjunto de referencia de 2 elementos $E = \{x_1, x_2\}$, tal que x_1 pertenece a A de manera parcial 0,4 y x_2 pertenece a A de manera parcial 0,8: $A = \{x_1|0{,}4; x_2|0{,}8\}$.

Sea E un conjunto y sean A y B dos subconjuntos borrosos de E. Decimos que A y B son iguales si y solo si para todo $x \in E,\ \mu_A(x) = \mu_B(x)$. Lo notaremos: $A = B$

Ejemplo 1.1.1.:

Sea A el conjunto ordinario de personas mayores a 25 años y B el conjunto difuso de personas adultas. Juan, de 26 años, pertenece a A. Juan pertenece a B de manera parcial.

Ejemplo 1.1.2.:

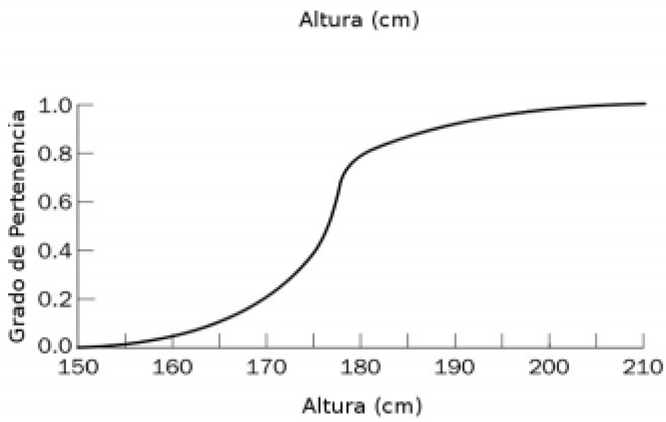
Sea C el conjunto de días con temperatura promedio mayor a 20ºC y D el conjunto de días calurosos. Un día de temperatura promedio de 23ºC pertenece a C. Además, pertenece a D de manera parcial.

Ejemplo 1.1.3.:

Imaginemos que queremos recoger datos de las cualidades físicas de los futbolistas de la selección argentina. Entre estas cualidades nos interesa la altura. Un ejemplo del conjunto difuso "Jugadores altos" (expresando la altura en cm) podría ser el siguiente:

Jugadores Altos = $\{160|0; 165|0{,}1;172|0{,}25; 178|0{,}6; 185|0{,}9; 200|1;$ ...}

Esto nos permite, por ejemplo, afirmar que un jugador de 1.78m tendría un grado 0.6 de pertenencia al conjunto difuso "Jugadores altos".



1.2 OPERACIONES EN CONJUNTOS BORROSOS

Se definen las siguientes operaciones con conjuntos borrosos.

Inclusión. Sea E un conjunto y sean A y B dos subconjuntos borrosos de E. Decimos que A está incluido en B si para todo $x \in E,\ \mu_A(x) \leq \ \mu_B(x)$. Lo notaremos: $A \subset B$.

Ejemplo 1.2.1. Sean $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = \{x_1|0{,}4; x_2|0{,}2; x_3|0; x_4|1\}$ y $B = \{x_1|0{,}3; x_2|0; x_3|0; x_4|0\}$. Como $0{,}3 \leq 0{,}4$; $0 \leq 0{,}2$; $0 \leq 0$ y $0 \leq 1$ entonces $B \subset A$.

Ejemplo 1.2.2. Sea $E = [0,1] \subset R$. Consideremos los subconjuntos A y B definidos por sus funciones de pertenencia: $\mu_A(x) = x^2$ y $\mu_B(x) = x$. Evidentemente para todo $x \in [0,1]$, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, por lo tanto $A \subset B$.

Complemento. Sea E un conjunto y sean A y B dos subconjuntos borrosos de E. Decimos que A y B son complementarios si para todo $x \in E$, $\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x)$. Lo notaremos: $B = \bar{A}$ o $\bar{A} = B$

Vale siempre $\overline{(\bar{A})} = A$.

Ejemplo 1.2.3. Sean $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$,

$A = \{x_1|0{,}13; x_2|0{,}61; x_3|0; x_4|0, x_5|1; x_6|0{,}03\}$ y

$B = \{x_1|0{,}87; x_2|0{,}39; x_3|1; x_4|1; x_5|0; x_6|0{,}97\}$. Como $\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x)$ para todo x del conjunto de referencia, entonces $B = \bar{A}$.

Ejemplo 1.2.4. Sea $E = [-5{,}5] \subset R$. Consideremos los subconjuntos A y B definidos por sus funciones de pertenencia: $\mu_A(x) = e^{-x^2}$ y $\mu_B(x) = 1 - e^{-x^2}$. Estas funciones se grafican en la figura 1.1. Evidentemente $B = \bar{A}$.

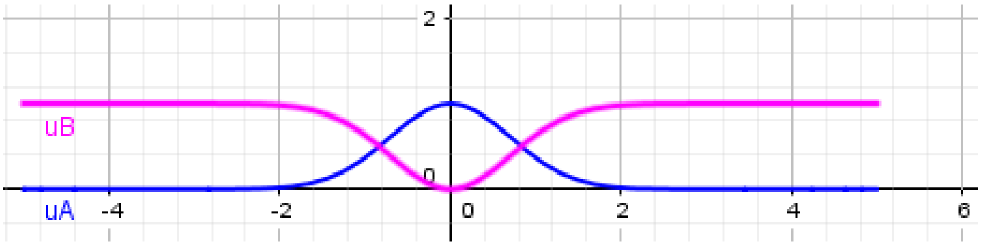


Figura 1.1. En azul μ_A, en violeta μ_B.

Intersección. Sea E un conjunto y sean A y B dos subconjuntos borrosos de E. Definimos la intersección $A \cap B$ como el subconjunto borroso más grande contenido en A y en B a la vez. La función de pertenencia del conjunto intersección resulta: $\mu_{A\cap B}(x) = mín\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x))$, para todo $x \in E$.

Veamos que esto es correcto. Como la intersección $A \cap B$ está contenida en A y en B, debe ser para todo $x \in E$: $\mu_{A\cap B}(x) \leq \mu_A(x)$ y $\mu_{A\cap B}(x) \leq \mu_B(x)$. Y como debe ser el mayor con esa propiedad, se tiene $\mu_{A\cap B}(x) = mín\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x))$, para todo $x \in E$.

Ejemplo 1.2.5. Sean $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $A = \{x_1|0{,}2; x_2|0{,}7; x_3|1; x_4|0, x_5|0{,}5\}$ y $B = \{x_1|0{,}5; x_2|0{,}3; x_3|1; x_4|0{,}1; x_5|0{,}5\}$.

Luego $A \cap B = \{x_1|0{,}2; x_2|0{,}3; x_3|1; x_4|0; x_5|0{,}5\}$

Ejemplo 1.2.6. Sea $E = [0{,}10] \subset R$. Y sean los subconjuntos borrosos A y B definidos por sus funciones de pertenencia: $\mu_A(x) = e^{-(x-3)^2}$ y $\mu_B(x) = 0.09x + 0.1$. Entonces la intersección tiene función de pertenencia:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\left(e^{-(x-3)^2}, 0.09x + 0.1\right) = \begin{cases} e^{-(x-3)^2} & si\ 0 \leq x \leq 1.85 \\ 0.09x + 0.1 & si\ 1.85 < x \leq 3.89 \\ e^{-(x-3)^2} & si\ 3.89 < x \leq 10 \end{cases}$$

Estas funciones se grafican en la figura 1.2.

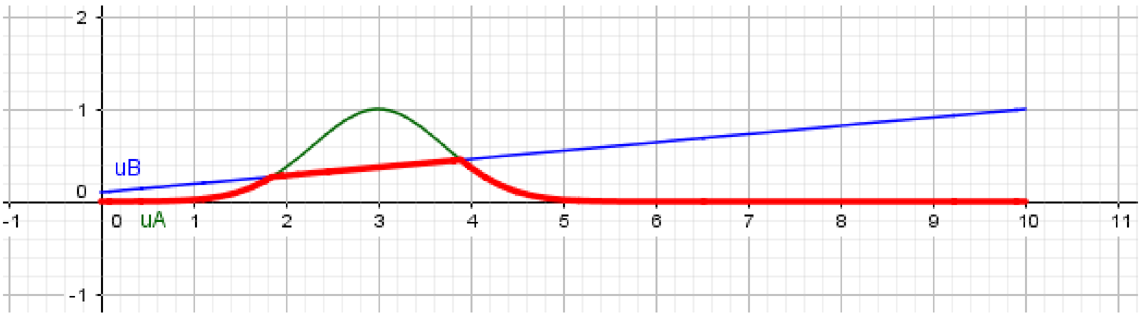


Figura 1.2. Por un lado, μ_A en verde y μ_B en azul. Por el otro, $\mu_{A\cap B}(x)$ en rojo.

Unión. Sea E un conjunto y sean A y B dos subconjuntos borrosos de E. Definimos la unión $A \cup B$ como el conjunto borroso más chico que contiene tanto a A como a B. Es decir $\mu_{A\cup B}(x) = \ máx\ \left(\mu_A(x),\ \mu_B(x)\right)$ para todo x en el conjunto de referencia E.

Veamos que esto es correcto. Como la unión $A \cup B$ contiene a A y a B, debe ser para todo $x \in E$: $\mu_{A\cup B}(x) \geq \ \mu_A(x)$ y $\mu_{A\cup B}(x) \geq \ \mu_B(x)$. Y como debe ser el menor con esa propiedad, se tiene $\mu_{A\cup B}(x) = \ max\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x))$.

Ejemplo 1.2.7. Sean $E, A\ y\ B$ como en el ejemplo *1.2.5.* Entonces $A \cup B = \{x_1|0{,}5; x_2|0{,}7; x_3|1; x_4|0{,}1; x_5|0{,}5\}$

Ejemplo 1.2.8. Considerando E, A y B como en el ejemplo *1.2.5.*, la unión $A \cup B$ tiene función de pertenencia

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\left(e^{-(x-3)^2}, 0.09x + 0.1\right) = \begin{cases} 0.09x + 0.1 & si\ 0 \leq x \leq 1.85 \\ e^{-(x-3)^2} & si\ 1.85 < x \leq 3.89 \\ 0.09x + 0.1 & si\ 3.89 < x \leq 10 \end{cases}$$

Estas funciones se grafican en la figura 1.3.

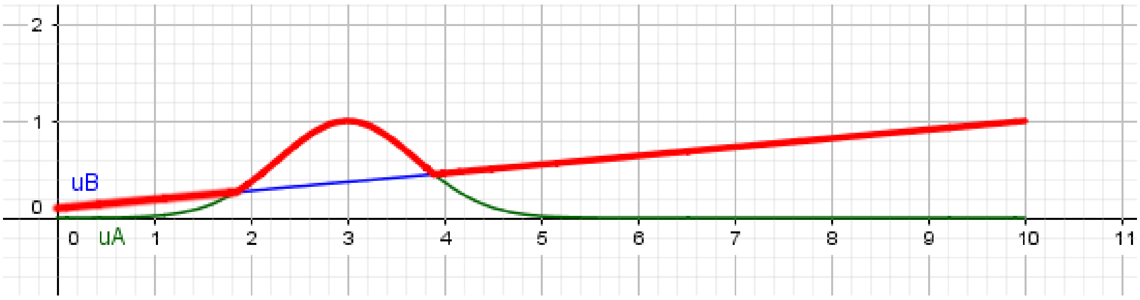


Figura 1.3. Por un lado, μ_A en verde y μ_B en azul. Por el otro, $\mu_{A\cup B}$ en rojo.

Producto algebraico. Sea E un conjunto y sean A y B dos subconjuntos borrosos de E. Definimos el producto algebraico de A y B, denotado $A.B$, de la siguiente manera: para todo $x \in E$, $\mu_{A.B}(x) = \mu_A(x).\mu_B(x)$. La función así definida es una función de pertenencia, ya que como $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ y $0 \leq \mu_B(x) \leq 1$, entonces $0 \leq \mu_{A.B}(x) \leq 1$.

Ejemplo 1.2.9. Considerando el ejemplo *1.2.5.*,

$$A.B = \{x_1|0{,}10; x_2|0{,}21; x_3|1; x_4|0; x_5|0{,}25\}$$

Ejemplo 1.2.10. Retomando los conjuntos del ejemplo 1.2.2, donde $\mu_A(x) = x^2$ y $\mu_B(x) = x$, resulta que el producto algebraico tiene función de pertenencia $\mu_{A.B}(x) = x^3$.

Suma algebraica. Sea E un conjunto y sean A y B dos subconjuntos borrosos de E. Definimos la suma algebraica de A y B, denotada $A\hat{+}B$, de la siguiente manera:

$\forall x \in E$, $\mu_{A\hat{+}B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x)$. La función así definida es una función de pertenencia, ya que como $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ y $0 \leq \mu_B(x) \leq 1$, entonces $0 \leq \mu_{A\hat{+}B}(x) \leq 1$.

Demostración $\mu_{A\hat{\mp}B}(x) \leq 1$

Supongamos $\mu_{A\hat{\mp}B}(x) > 1$.

Entonces $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x) > 1$.

$$\mu_A(x).\left(1 - \mu_B(x)\right) + \mu_B(x) > 1.$$

$$\mu_A(x).\left(1 - \mu_B(x)\right) > 1 - \mu_B(x)$$

Si $\left(1 - \mu_B(x)\right) = 0$ luego 0>0, absurdo. Entonces consideremos $(1 - \mu_B(x)) \neq 0$

Luego, $\mu_A(x) > 1$. Absurdo.

Por lo tanto, $\mu_{A\hat{\mp}B}(x) \leq 1$.

Ejemplo 1.2.11: Teniendo en cuenta nuevamente el ejemplo *1.2.5.*, $A\hat{\mp}B = \{x_1|0{,}60; x_2|0{,}79; x_3|1; x_4|0{,}1; x_5|0{,}75\}$

Ejemplo 1.2.12. Con los conjuntos del ejemplo 1.2.2, se tiene $\mu_{A\hat{\mp}B}(x) = x + x^2 - x^3$

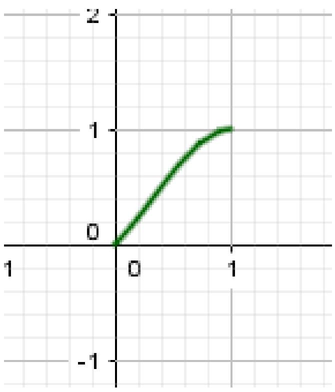


Figura 1.4. La función de pertenencia en $E = [0{,}1] \subset R$.

1.3 PROPIEDADES.

Conjuntos Ordinarios

A continuación se menciona una serie de propiedades sobre conjuntos ordinarios. Son propiedades muy conocidas, y se enumeran a fin de analizar luego si las mismas propiedades también se cumplen para conjuntos borrosos.

Sea E un conjunto ordinario. Dados $A \subset E,\ B \subset E,\ C \subset E,$ subconjuntos ordinarios de E, se tiene:

1) $A \cap B = B \cap A$
2) $A \cup B = B \cup A$
3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
5) $A \cap A = A$
6) $A \cup A = A$
7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
9) $A \cap \bar{A} = \emptyset$
10) $A \cup \bar{A} = E$
11) $A \cap \emptyset = \emptyset$
12) $A \cup \emptyset = A$
13) $A \cap E = A$
14) $A \cup E = E$
15) $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
16) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Nos interesa estudiar si los conjuntos borrosos verifican todas las propiedades arriba enumeradas.

Los subconjuntos borrosos de E, satisfacen todas las propiedades anteriores excepto 9 y 10. Veamos esto con un contraejemplo:

Sea $A = \{x_1|0{,}4; x_2|0{,}8\}$. Luego, $\bar{A} = \{x_1|1-0{,}4; x_2|1-0{,}8\} = \{x_1|0{,}6; x_2|0{,}2\}$

$\mu_{A\cap\bar{A}}(x_1) = \ mín\left(\mu_A(x_1), \mu_{\bar{A}}(x_1)\right) = 0{,}4 \ \neq 0$

Luego, $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ y la propiedad 9 no se cumple.

Por otro lado, para el mismo subconjunto borroso A,

$\mu_{A\cup\bar{A}}(x_1) = \ máx\left(\mu_A(x_1), \mu_{\bar{A}}(x_1)\right) = 0{,}6 \ \neq 1$

Luego, $A \cup \bar{A} \neq E$, y la propiedad 10 no se cumple.

Como se dijo anteriormente, todas las otras propiedades sí se cumplen para conjuntos borrosos, y la siguiente proposición lo enuncia y demuestra:

Proposición 1

Dados A, B y C subconjuntos borrosos de E, se tiene:

1) $A \cap B = B \cap A$
2) $A \cup B = B \cup A$
3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
5) $A \cap A = A$
6) $A \cup A = A$
7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
9) $A \cap \emptyset = \emptyset$
10) $A \cup \emptyset = A$
11) $A \cap E = A$
12) $A \cup E = E$
13) $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$
14) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Demostraciones:

Como se ha visto en la definición de igualdad, dos conjuntos borrosos son iguales si su función de pertenencia es la misma para todo elemento en E. Por lo tanto, para demostrar las propiedades de la Proposición 1, se debe probar que la función de pertenencia de ambos miembros de la igualdad coincide para cada $x \in E$.

1) $\mu_{A \cap B}(x) = mín(\mu_A(x),\ \mu_B(x)) = mín(\mu_B(x),\ \mu_A(x)) = \mu_{B \cap A}(x)$.

Luego $A \cap B = B \cap A$ □

2) $\mu_{A \cup B}(x) = máx(\mu_A(x),\ \mu_B(x)) = máx(\mu_B(x),\ \mu_A(x)) = \mu_{B \cup A}(x)$.

Luego $A \cup B = B \cup A$ □

3) Caso 1) $\mu_A(x) < \mu_C(x) < \mu_B(x)$:

$\mu_{(A\cap B)\cap C}(x) = mín(\mu_{A\cap B}(x),\ \mu_C(x)) = mín\left(mín\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x)), \mu_C(x)\right) = mín(\mu_A(x), \mu_C(x)) = mín\left(\mu_A(x), mín\ (\mu_B(x),\ \mu_C(x))\right) = mín\ (\mu_A(x), \mu_{B\cap C}(x)) = \mu_{A\cap(B\cap C)}(x)$

Caso 2) $\mu_A(x) < \mu_B(x) < \mu_C(x)$:

$\mu_{(A\cap B)\cap C}(x) = mín(\mu_{A\cap B}(x),\ \mu_C(x)) = mín\left(mín\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x)), \mu_C(x)\right) = mín(\mu_A(x), \mu_C(x)) = \mu_A(x) = mín\left(\mu_A(x), mín\ (\mu_B(x),\ \mu_C(x))\right) = mín\ (\mu_A(x), \mu_{B\cap C}(x)) = \mu_{A\cap(B\cap C)}(x)$

Caso 3) $\mu_C(x) < \mu_A(x) < \mu_B(x)$:

$\mu_{(A\cap B)\cap C}(x) = mín(\mu_{A\cap B}(x),\ \mu_C(x)) = mín\left(mín\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x)), \mu_C(x)\right) = mín(\mu_A(x), \mu_C(x)) = \mu_C(x) = mín(\mu_A(x), \mu_C(x)) = mín\left(\mu_A(x), mín\ (\mu_B(x), \mu_C(x))\right) = mín\ (\mu_A(x),\ \mu_{B\cap C}(x)) = \mu_{A\cap(B\cap C)}(x)$

Caso 4) $\mu_B(x) < \mu_A(x) < \mu_C(x)$:

$\mu_{(A\cap B)\cap C}(x) = mín(\mu_{A\cap B}(x),\ \mu_C(x)) = mín\left(mín\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x)), \mu_C(x)\right) = mín(\mu_B(x), \mu_C(x)) = \mu_B(x) = mín(\mu_A(x), \mu_B(x)) = mín\left(\mu_A(x), mín\ (\mu_B(x), \mu_C(x))\right) = mín\ (\mu_A(x),\ \mu_{B\cap C}(x)) = \mu_{A\cap(B\cap C)}(x)$

Caso 5) $\mu_C(x) < \mu_B(x) < \mu_A(x)$:

$\mu_{(A\cap B)\cap C}(x) = mín(\mu_{A\cap B}(x),\ \mu_C(x)) = mín\left(mín\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x)), \mu_C(x)\right) = mín(\mu_B(x), \mu_C(x)) = \mu_C(x) = mín(\mu_A(x), \mu_C(x)) = mín\left(\mu_A(x), mín\ (\mu_B(x), \mu_C(x))\right) = mín\ (\mu_A(x),\ \mu_{B\cap C}(x)) = \mu_{A\cap(B\cap C)}(x)$

Caso 6) $\mu_B(x) < \mu_C(x) < \mu_A(x)$:

$\mu_{(A\cap B)\cap C}(x) = mín(\mu_{A\cap B}(x),\ \mu_C(x)) = mín\left(mín\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x)), \mu_C(x)\right) = mín(\mu_B(x), \mu_C(x)) = \mu_B(x) = mín(\mu_A(x), \mu_B(x)) = mín\left(\mu_A(x), mín\ (\mu_B(x), \mu_C(x))\right) = mín\ (\mu_A(x),\ \mu_{B\cap C}(x)) = \mu_{A\cap(B\cap C)}(x)$ □

4) La demostración de esta propiedad también puede hacerse dividiendo en 6 casos, como la propiedad 3. Como los pasos de la demostración son similares, solo se presenta en un caso.

Caso 1) $\mu_A(x) < \mu_C(x) < \mu_B(x)$:

$\mu_{(A\cup B)\cup C}(x) = máx\left(\mu_{A\cup B}(x),\ \mu_C(x)\right) = máx\left(máx\left(\mu_A(x),\ \mu_B(x)\right), \mu_C(x)\right) = máx\left(\mu_B(x), \mu_C(x)\right) = \mu_B(x) = máx\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) = máx\left(\mu_A(x), máx\left(\mu_B(x), \mu_C(x)\right)\right) = máx\left(\mu_A(x),\ \mu_{B\cup C}(x)\right) = \mu_{A\cup(B\cup C)}(x)$ □

5) $\mu_{A\cap A}(x) = mín\left(\mu_A(x),\ \mu_A(x)\right) = \mu_A(x)$. Luego $A \cap A = A$ □

6) $\mu_{A\cup A}(x) = máx\left(\mu_A(x),\ \mu_A(x)\right) = \mu_A(x)$. Luego $A \cup A = A$ □

7) Caso 1) $\mu_A(x) < \mu_C(x) < \mu_B(x)$:

$\mu_{A\cap(B\cup C)}(x) = mín\left(\mu_A(x),\ \mu_{B\cup C}(x)\right) = mín\left(\mu_A(x), máx(\mu_B(x), \mu_C(x)\right) = mín\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) = \mu_A(x) = máx\left(\mu_A(x), \mu_A(x)\right) = máx\left(mín(\mu_A(x), \mu_B(x)), mín(\mu_A(x), \mu_C(x))\right) = máx(\mu_{(A\cap B)}(x), \mu_{(A\cap C)}(x)) = \mu_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x)$

Caso 2) $\mu_A(x) < \mu_B(x) < \mu_C(x)$:

$\mu_{A\cap(B\cup C)}(x) = mín\left(\mu_A(x),\ \mu_{B\cup C}(x)\right) = mín\left(\mu_A(x), máx(\mu_B(x), \mu_C(x)\right) = mín\left(\mu_A(x), \mu_C(x)\right) = \mu_A(x) = máx\left(\mu_A(x), \mu_A(x)\right) = máx\left(mín(\mu_A(x), \mu_B(x)), mín(\mu_A(x), \mu_C(x))\right) = máx(\mu_{(A\cap B)}(x), \mu_{(A\cap C)}(x)) = \mu_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x)$

Caso 3) $\mu_C(x) < \mu_A(x) < \mu_B(x)$:

$\mu_{A\cap(B\cup C)}(x) = mín\left(\mu_A(x),\ \mu_{B\cup C}(x)\right) = mín\left(\mu_A(x), máx(\mu_B(x), \mu_C(x)\right) = mín\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) = \mu_A(x) = máx\left(\mu_A(x), \mu_C(x)\right) = máx\left(mín(\mu_A(x), \mu_B(x)), mín(\mu_A(x), \mu_C(x))\right) = máx(\mu_{(A\cap B)}(x), \mu_{(A\cap C)}(x)) = \mu_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x)$

Caso 4) $\mu_B(x) < \mu_A(x) < \mu_C(x)$:

$\mu_{A\cap(B\cup C)}(x) = mín\left(\mu_A(x),\ \mu_{B\cup C}(x)\right) = mín\left(\mu_A(x), máx(\mu_B(x), \mu_C(x)\right) = mín\left(\mu_A(x), \mu_C(x)\right) = \mu_A(x) = máx\left(\mu_B(x), \mu_A(x)\right) = máx\left(mín(\mu_A(x), \mu_B(x)), mín(\mu_A(x), \mu_C(x))\right) = máx(\mu_{(A\cap B)}(x), \mu_{(A\cap C)}(x)) = \mu_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x)$

Caso 5) $\mu_C(x) < \mu_B(x) < \mu_A(x)$:

$\mu_{A\cap(B\cup C)}(x) = mín\left(\mu_A(x),\ \mu_{B\cup C}(x)\right) = mín\left(\mu_A(x), máx(\mu_B(x), \mu_C(x)\right) = mín\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) = \mu_B(x) = máx\left(\mu_B(x), \mu_C(x)\right) = máx\left(mín(\mu_A(x), \mu_B(x)), mín(\mu_A(x), \mu_C(x))\right) = máx(\mu_{(A\cap B)}(x), \mu_{(A\cap C)}(x)) = \mu_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x)$

Caso 6) $\mu_B(x) < \mu_C(x) < \mu_A(x)$:

$\mu_{A\cap(B\cup C)}(x) = mín\big(\mu_A(x),\ \mu_{B\cup C}(x)\big) = mín\big(\mu_A(x), máx(\mu_B(x), \mu_C(x)\big) = mín\big(\mu_A(x), \mu_C(x)\big) = \mu_C(x) = máx\big(\mu_B(x), \mu_C(x)\big) =$
$máx\big(mín(\mu_A(x), \mu_B(x)), mín(\mu_A(x), \mu_C(x))\big) = máx(\mu_{(A\cap B)}(x), \mu_{(A\cap C)}(x)) =$
$\mu_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x)$ □

8) La demostración de esta propiedad también puede hacerse dividiendo en 6 casos, como la propiedad 7. Como los pasos de la demostración son similares, solo se presenta un caso.

Caso 1) $\mu_A(x) < \mu_C(x) < \mu_B(x)$:

$\mu_{A\cup(B\cap C)}(x) = máx\big(\mu_A(x),\ \mu_{B\cap C}(x)\big) = máx\big(\mu_A(x), mín(\mu_B(x), \mu_C(x)\big) = máx\big(\mu_A(x), \mu_C(x)\big) = \mu_C(x) = mín\big(\mu_B(x), \mu_C(x)\big) =$
$mín\big(máx(\mu_A(x), \mu_B(x)), máx(\mu_A(x), \mu_C(x))\big) = mín(\mu_{(A\cup B)}(x), \mu_{(A\cup C)}(x)) =$
$\mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x)$ □

9) $\mu_{A\cap\emptyset}(x) = mín\Big(\mu_A(x),\ \mu_\emptyset(x)\Big) = mín(\mu_A(x),\ 0) = 0 = \mu_\emptyset(x)$.

Luego $A \cap \emptyset = \emptyset$ □

10) $\mu_{A\cup\emptyset}(x) = máx\Big(\mu_A(x),\ \mu_\emptyset(x)\Big) = máx(\mu_A(x),\ 0) = \mu_A(x)$.

Luego $A \cup \emptyset = A$ □

11) $\mu_{A\cap E}(x) = mín\big(\mu_A(x),\ \mu_E(x)\big) = mín(\mu_A(x),\ 1) = \mu_A(x)$.

Luego $A \cap E = A$ □

12) $\mu_{A\cup E}(x) = máx\big(\mu_A(x),\ \mu_E(x)\big) = máx(\mu_A(x),\ 1) = 1 = \mu_E(x)$.

Luego $A \cup E = E$ □

13) Caso 1) $\mu_A(x) < \mu_B(x)$:

$$\mu_{\overline{(A\cap B)}}(x) = 1 - \mu_{A\cap B}(x) = 1 - mín\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = 1 - \mu_A(x)$$
$$= máx(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)) = máx(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)) = \mu_{\bar{A}\cup\bar{B}}(x)$$

Análogamente se demuestra el caso $\mu_B(x) < \mu_A(x)$ □

14) Caso 1) $\mu_A(x) < \mu_B(x)$:

$$\mu_{\overline{(A\cup B)}}(x) = 1 - \mu_{A\cup B}(x) = 1 - máx\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = 1 - \mu_B(x) =$$
$$= mín(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)) = mín(\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)) = \mu_{\bar{A}\cap\bar{B}}(x)$$

Análogamente se demuestra el caso $\mu_B(x) < \mu_A(x)$ □

Las sumas y productos algebraicos verifican las propiedades enunciadas en la siguiente proposición:

Proposición 2

Dados A, B y C subconjuntos borrosos, se tiene:

1) $A.B = B.A$
2) $A\hat{+}B = B\hat{+}A$
3) $(A.B).C = A.(B.C)$
4) $(A\hat{+}B)\hat{+}C = A\hat{+}(B\hat{+}C)$
5) $A.\emptyset = \emptyset$
6) $A\hat{+}\emptyset = A$
7) $A.E = A$
8) $A\hat{+}E = E$
9) $\overline{(\bar{A})} = A$
10) $\overline{(A.B)} = \bar{A}\,\hat{+}\bar{B}$
11) $\overline{(A\hat{+}B)} = \bar{A}\,.\bar{B}$

Demostraciones

Sean $a = \mu_A(x),\ b = \mu_B(x),\ c = \mu_C(x)$

Las igualdades 1), 2) y 3) se satisfacen por las propiedades asociativas, simétricas y distributivas de la suma y el producto de números reales. Para ilustrar, véase la demostración 4):

4) $(A\hat{+}B)\hat{+}C = A\hat{+}(B\hat{+}C)$ se cumple ya que

$(a + b - ab) + c - (a + b - ab)c = a + b - ab + c - ac - bc + abc = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc)$ □

5) $A.\emptyset = \emptyset$ se cumple porque $a.0 = 0$, por propiedad de la multiplicación en números reales. □

6) $A\hat{+}\emptyset = A$ es cierta ya que $a + 0 - a.0 = a$, por propiedad del elemento neutro de la suma y del cero en la multiplicación en números reales. □

7) $A.E = A$ se cumple dado que $a.1 = a$, por propiedad del elemento neutro de la multiplicación en números reales. □

8) $A\hat{+}E = E$ es cierta ya que $a + 1 - a.1 = 1$, por propiedad del elemento neutro de la multiplicación e inversa de la suma en números reales. □

9) $\overline{(\bar{A})} = A$ se cumple ya que $1 - (1 - a) = 1 - 1 + a = a$ □

10) $\overline{(A.B)} = \bar{A}\,\hat{+}\bar{B}$ se cumple porque $\mu_{\overline{(A.B)}}(x) = 1 - ab = 1 - a + 1 - b - 1 + a + b - ab = (1 - a) + (1 - b) - (1 - a)\,(1 - b) = \mu_{\bar{A}\,\hat{+}\bar{B}}(x)$ □

11) $\overline{(A\hat{+}B)} = \bar{A}\,.\bar{B}$ es cierta porque $\mu_{\overline{(A\hat{+}B)}}(x) = 1 - (a + b - ab) =$

$= 1 - a - b + ab = (1 - a)\,(1 - b) = \mu_{\bar{A}\,.\bar{B}}\,(x)$ □

Sin embargo, probaremos que la propiedad distributiva del producto algebraico respecto de la suma algebraica no se mantiene para conjuntos borrosos, es decir:

$$A.(B\hat{+}C) \neq (A.B)\hat{+}(A.C)$$

Para el miembro de la izquierda se tiene: $a.(b + c - bc) = ab + ac - abc$.
Para el miembro de la derecha se tiene: $ab + ac - (ab)(ac) = ab + ac - a^2bc$.
Estas dos expresiones son iguales únicamente si $a = 0$ o $a = 1$ o $b = 0$ o $c = 0$ □
Por otro lado, la unión y la intersección no son distributivas respecto al producto y a la suma algebraica. Mostraremos esto mediante un ejemplo:

Sean $A = \{x_1|0{,}4; x_2|0{,}8\}$, $B = \{x_1|0{,}5; x_2|0{,}9\}$, $C = \{x_1|0{,}8; x_2|0{,}7\}$

1) $A \cap (B.C) \neq (A \cap B).(A \cap C)$ pues

$$\mu_{A\cap(B.C)}(x_2) = mín\big(\mu_A(x_2), \mu_{B.C}(x_2)\big) = mín\big(\mu_A(x_2), \mu_B(x_2).\mu_C(x_2)\big) = 0{,}63$$

mientras que

$\mu_{(A\cap B).(A\cap C)}(x_2) = \mu_{(A\cap B)}(x_2).\mu_{(A\cap C)}(x_2) =$

$mín\big(\mu_A(x_2), \mu_B(x_2)\big).mín\big(\mu_A(x_2), \mu_C(x_2)\big) = 0{,}8.0{,}7 = 0{,}56$ □

2) $A \cup (B.C) \neq (A \cup B).(A \cup C)$ pues

$$\mu_{A\cup(B.C)}(x_2) = máx\big(\mu_A(x_2), \mu_{B.C}(x_2)\big) = máx\big(\mu_A(x_2), \mu_B(x_2).\mu_C(x_2)\big) = 0{,}8$$

Mientras que

$\mu_{(A\cup B).(A\cup C)}(x_2) = \mu_{(A\cup B)}(x_2).\mu_{(A\cup C)}(x_2) =$

$máx\big(\mu_A(x_2), \mu_B(x_2)\big).máx\big(\mu_A(x_2), \mu_C(x_2)\big) = 0{,}9.0{,}8 = 0{,}72$ □

3) $A \cap (B\hat{+}\,C) \neq (A \cap B)\hat{+}\,(A \cap C)$ pues

$$\mu_{A\cap(B\hat{+}C)}(x_2) = mín\big(\mu_A(x_2), \mu_{B\hat{+}C}(x_2)\big)$$

$$= mín\big(\mu_A(x_2), \mu_B(x_2) + \mu_C(x_2) - \mu_B(x_2).\mu_C(x_2)\big) = 0{,}8$$

Mientras que

$$\mu_{(A\cap B)\hat{+}(A\cap C)}(x_2) = \mu_{(A\cap B)}(x_2) + \mu_{(A\cap C)}(x_2) - \mu_{(A\cap B)}(x_2).\mu_{(A\cap C)}(x_2)$$

$$= mín\big(\mu_A(x_2), \mu_B(x_2)\big) + mín\big(\mu_A(x_2), \mu_C(x_2)\big)$$

$$- mín\big(\mu_A(x_2), \mu_B(x_2)\big).mín\big(\mu_A(x_2), \mu_C(x_2)\big)$$

$$= 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8.0{,}7 = 0{,}94 \ \square$$

4) $A \cup (B\hat{+}C) \neq (A \cup B)\hat{+}(A \cup C)$ pues

$$\mu_{A\cup(B\hat{+}C)}(x_2) = máx\big(\mu_A(x_2), \mu_{B\hat{+}C}(x_2)\big)$$

$$= máx\big(\mu_A(x_2), \mu_B(x_2) + \mu_C(x_2) - \mu_B(x_2).\mu_C(x_2)\big) = 0{,}97$$

Mientras que

$$\mu_{(A\cup B)\hat{+}(A\cup C)}(x_2) = \mu_{(A\cup B)}(x_2) + \mu_{(A\cup C)}(x_2) - \mu_{(A\cup B)}(x_2).\mu_{(A\cup C)}(x_2)$$

$$= máx\big(\mu_A(x_2), \mu_B(x_2)\big) + máx\big(\mu_A(x_2), \mu_C(x_2)\big)$$

$$- máx\big(\mu_A(x_2), \mu_B(x_2)\big).máx\big(\mu_A(x_2), \mu_C(x_2)\big)$$

$$= 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}9.0.8 = 0{,}98 \ \square$$

Sin embargo, el producto y sumas algebraicos sí son operaciones distributivas respecto a unión e intersección, como se enuncia y demuestra en la siguiente proposición:

Proposición 3

1) $A.(B \cap C) = (A.B) \cap (A.C)$
2) $A.(B \cup C) = (A.B) \cup (A.C)$
3) $A\hat{+}(B \cap C) = (A\hat{+}B) \cap (A\hat{+}C)$
4) $A\hat{+}(B \cup C) = (A\hat{+}B) \cup (A\hat{+}C)$

Demostraciones:

1) Sabemos que vale lo siguiente:
   $a.mín(b,c) = mín(a.b, a.c)$ si $a \geq 0$. Entonces
   $\mu_{A.(B\cap C)}(x) = \mu_A(x).\mu_{(B\cap C)}(x) = \mu_A(x).mín\big(\mu_B(x), \mu_C(x)\big) =$
   $mín\big(\mu_A(x).\mu_B(x), \mu_A(x).\mu_C(x)\big) = mín\big(\mu_{A.B}(x), \mu_{A.C}(x)\big) = \mu_{(A.B)\cap(A.C)}(x)$ □
2) Sabemos que vale lo siguiente:

$a.máx(b, c) = máx(a.b, a.c)$ si $a \geq 0$. Entonces

$\mu_{A.(B\cup C)}(x) = \mu_A(x).\mu_{(B\cup C)}(x) = \mu_A(x).máx(\mu_{\mathrm{B}}(x), \mu_C(x))$=

$máx(\mu_A(x).\mu_B(x), \mu_A(x).\mu_C(x)) = máx(\mu_{A.B}(x), \mu_{A.C}(x)) = \mu_{(A.B)\cup(A.C)}(x)$□

3) Sabemos que vale lo siguiente:

$a + mín(n, m) = mín(a + n, a + m)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu_{A\hat{+}(B\cap C)}(x) &= \mu_A(x) + \mu_{(B\cap C)}(x) - \mu_A(x).\mu_{(B\cap C)}(x) \\
&= \mu_A(x) + mín(\mu_{\mathrm{B}}(x), \mu_C(x)) - \mu_A(x).mín(\mu_{\mathrm{B}}(x), \mu_C(x)) \\
&= \mu_A(x) + mín(\mu_{\mathrm{B}}(x), \mu_C(x)).(1 - \mu_A(x)) \\
&= \mu_A(x) + mín\left(\mu_{\mathrm{B}}(x).(1 - \mu_A(x)), \mu_C(x).(1 - \mu_A(x))\right) \\
&= mín\left(\mu_A(x) + \mu_{\mathrm{B}}(x).(1 - \mu_A(x)), \mu_A(x) + \mu_C(x).(1 - \mu_A(x))\right) \\
&= mín(\mu_{\mathrm{A}}(x) + \mu_{\mathrm{B}}(x) - \mu_{\mathrm{A}}(x).\mu_{\mathrm{B}}(x), \mu_{\mathrm{A}}(x) + \mu_C(x) - \mu_{\mathrm{A}}(x).\mu_{\mathrm{C}}(x)) \\
&= mín\left(\mu_{(A\hat{+}B)}(x), \mu_{(A\hat{+}C)}(x)\right) = \mu_{(A\hat{+}B)\cap(A\hat{+}C)}(x) \quad \square
\end{aligned}$$

4) Sabemos que vale lo siguiente:

$a + máx(n, m) = máx(a + n, a + m)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu_{A\hat{+}(B\cup C)}(x) &= \mu_A(x) + \mu_{(B\cup C)}(x) - \mu_A(x).\mu_{(B\cup C)}(x) \\
&= \mu_A(x) + máx(\mu_{\mathrm{B}}(x), \mu_C(x)) - \mu_A(x).máx(\mu_{\mathrm{B}}(x), \mu_C(x)) \\
&= \mu_A(x) + máx(\mu_{\mathrm{B}}(x), \mu_C(x)).(1 - \mu_A(x)) \\
&= \mu_A(x) + máx\left(\mu_{\mathrm{B}}(x).(1 - \mu_A(x)), \mu_C(x).(1 - \mu_A(x))\right) \\
&= máx\left(\mu_A(x) + \mu_{\mathrm{B}}(x).(1 - \mu_A(x)), \mu_A(x) + \mu_C(x).(1 - \mu_A(x))\right) \\
&= máx(\mu_{\mathrm{A}}(x) + \mu_{\mathrm{B}}(x) - \mu_{\mathrm{A}}(x).\mu_{\mathrm{B}}(x), \mu_{\mathrm{A}}(x) + \mu_C(x) \\
&\quad - \mu_{\mathrm{A}}(x).\mu_{\mathrm{C}}(x)) = máx\left(\mu_{(A\hat{+}B)}(x), \mu_{(A\hat{+}C)}(x)\right) = \mu_{(A\hat{+}B)\cup(A\hat{+}C)}(x) \ \square
\end{aligned}$$

En este capítulo vimos las principales definiciones y conceptos de la teoría de conjuntos difusos. Se demostraron propiedades necesarias que utilizaremos más adelante y se expusieron algunos ejemplos.

En el próximo capítulo introduciremos las nociones de relaciones difusas, para poder crear un sistema de lógica difusa.

TEORÍA DE RELACIONES DIFUSAS

Este capítulo introduce la noción de relación como la idea básica detrás de numerosas operaciones sobre conjuntos como productos cartesianos, composición de relaciones y propiedades de equivalencia. Como los conjuntos, las relaciones son de fundamental importancia en todos los campos de la ingeniería, la ciencia y las matemáticas. También están asociadas a la teoría de grafos, un tema de gran impacto en el diseño y la manipulación de datos. Además, están íntimamente involucradas en la lógica, el razonamiento aproximado, los sistemas basados en reglas, la simulación no lineal, la evaluación sintética, la clasificación, el reconocimiento de patrones y el control.

En las relaciones ordinarias, los elementos de los conjuntos tienen dos grados de relación: “relacionados” o “no relacionados”. En cambio, en las relaciones difusas, los elementos de dos o más conjuntos adoptan un número infinito de grados de relación entre "relacionados" y "no relacionados". Por ejemplo, la relación “es parecido a” es una relación difusa. Dos objetos pueden ser “altamente parecidos”, “muy parecidos”, “algo parecidos”, “casi nada parecidos”, etc.

En este sentido, las relaciones difusas son para las relaciones ordinarias como los conjuntos difusos para los ordinarios.

2.1 RELACIONES DIFUSAS.

Una relación difusa o borrosa representa el grado de presencia o ausencia de asociación, interacción o interconexión entre los elementos de dos o más conjuntos borrosos.

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos de referencia. Una relación difusa binaria $R(E_1, E_2)$ es un subconjunto borroso en el espacio producto E_1 x E_2, es decir, es un subconjunto borroso de E_1 x E_2 y está caracterizada por la función de pertenencia $\mu_R(x,y)$ donde $x \in E_1$ y $y \in E_2$, o sea $R(E_1,E_2) = \{((x,y)|\mu_R(x,y)); (x,y) \in E_1 \text{ x } E_2\}$.

La diferencia entre una relación difusa y una ordinaria es que para la primera $\mu_R(x,y) \in [0,1]$ mientras que, para la segunda, $\mu_R(x,y) = 0$ o 1.

En el caso que el conjunto de referencia sea finito, la función de pertenencia de una relación puede darse en una tabla.

Ejemplo 2.1.1. Sean $E_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$; $E_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$. La siguiente tabla muestra una relación difusa binaria:

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0	0,1	0,3	1
x_2	0	0,8	0	0	1
x_3	0,4	0,4	0,5	0	0,2

La tabla indica, por ejemplo, que $\mu_R(x_1,y_2) = 0$, $\mu_R(x_3,y_3) = 0.5$, $\mu_R(x_2,y_5) = 1$, etc.

En los siguientes ejemplos se muestran relaciones entre conjuntos infinitos continuos, relaciones del subconjunto de los números reales en ese mismo conjunto.

Ejemplo 2.1.2. Consideremos la relación borrosa entre x e y con $x \in \mathbb{R}^+$y $y \in \mathbb{R}^+$, tal que $y \gg x$ (es decir, y es mucho más grande que x), expresada por la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad y - x < 0 \\ 1 - e^{-k_1(y-x)^2} & si \quad y - x \geq 0 \end{cases}$$

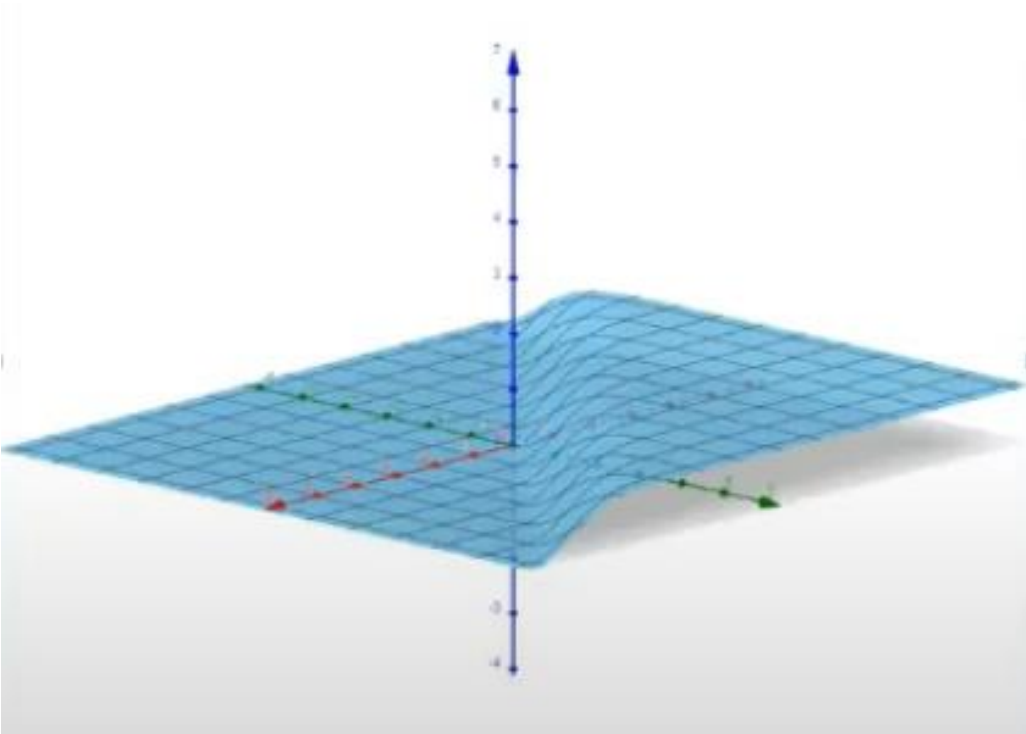


Figura 2.1. Función de pertenencia evaluando $k_1 = 0{,}5$

Dado que las relaciones borrosas son conjuntos borrosos en un espacio producto, podemos definir las operaciones algebraicas para estas relaciones, utilizando los conceptos vistos en el Capítulo I.

2.2 OPERACIONES EN RELACIONES DIFUSAS.

Intersección. La intersección de dos relaciones R y S, denotada $R \cap S$, está definida por la expresión $\mu_{R \cap S}(x, y) = \ mín\ (\mu_R(x, y),\ \mu_S(x, y))$.

Esta operación también puede definirse con las llamadas "*t-normas*" (o normas triangulares) que generalizan la conjunción lógica. Una t-norma es una operación binaria $\star$:[0,1] → [0,1] que satisface las siguientes condiciones:

- $\star\ (x, y) = \star\ (y, x)$ (conmutatividad)
- $\star\ (x,\ \star\ (y, z)) = \star\ (\star\ (x, y), z)$ (asociatividad)
- $y \leq z \Longrightarrow \star\ (x, y) \leq \star\ (x, z)$ (monotonía)
- $\star\ (x, 1) = x$ (elemento neutro 1)

Proposición 4.

La operación binaria $\star\,(R(x,y), S(x,y))$ $=$mín $(\mu_R(x,y),\ \mu_S(x,y))$ es una t-norma.

Demostración:

- Conmutatividad: $mín\left(\mu_R(x,y),\ \mu_S(x,y)\right) = mín\left(\mu_S(x,y),\ \mu_R(x,y)\right)$ (Propiedad conmutativa de la función $mín$).
- Asociatividad: $mín\ ((\mu_R(x,y), mín(\mu_S(x,y), \mu_T(x,y)))$= $mín\ (mín(\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)), \mu_T(x,y))$ (propiedades de la función $mín$).
- Monotonía: $\mu_S(x,y) \leq \mu_T(x,y) \Longrightarrow mín\left(\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)\right) \leq mín\left(\mu_R(x,y), \mu_T(x,y)\right)$ por propiedades de mínimo de números reales.
- Elemento neutro: $mín\ (\mu_R(x,y),\ 1) = \mu_R(x,y)$, pues $\mu_R(x,y) \in [0,1]$

Por lo tanto, $\mu_{R\cap S}(x,y) = \mu_R(x,y) \star \mu_S(x,y)$ □

Ejemplo 2.2.1. Las siguientes tablas muestran una relación R, una relación S y por último, la intersección de ambas.

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	1	0
x_2	0,8	1	0	0,2
x_3	0,5	0	0,4	0

S	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0	0,7	0
x_2	0,1	0,8	1	1
x_3	0,6	0,9	0,3	0,2

$R \cap S$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0	0,7	0
x_2	0,1	0,8	0	0,2
x_3	0,5	0	0,3	0

Sea la relación R que representa "y es mucho más grande que x", con la función de pertenencia $\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad y - x < 0 \\ 1 - e^{-k_1(y-x)^2} & si \quad y - x \geq 0 \end{cases}$

Y sea S la relación "la suma $x + y$ es cercana a 3", con función de pertenencia $\mu_S(x,y) = e^{-(x+y-3)^2}$. La intersección $R \cap S$ se muestra en la figura Figura 2.2, y representa la relación: "y es mucho más grande que x, y la suma $x + y$ es cercana a 3"

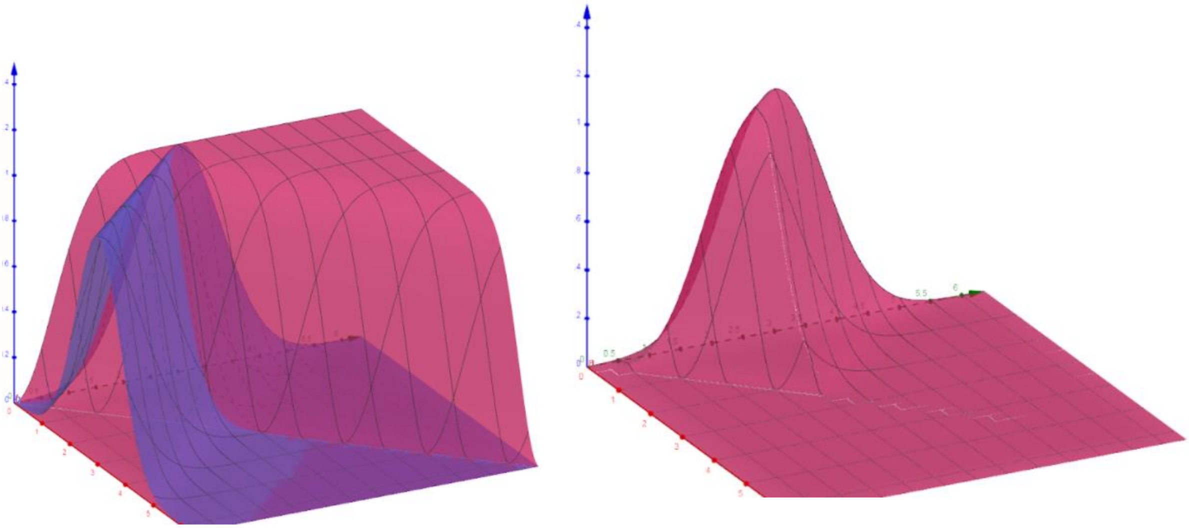


Figura 2.2. A la izquierda, las dos funciones de pertenencia. A la derecha, la intersección (mínimo).

Unión. La unión de dos relaciones R y S, denotada $R \cup S$, está definida por la expresión $\mu_{R\cup S}(x,y) = \; máx\;(\mu_R(x,y),\; \mu_S(x,y))$.

Esta operación también puede definirse con las "*t-conormas*" (o conormas triangulares, además llamadas *s-normas*). Una t-conorma es una operación binaria $\bigoplus: [0,1] \to [0,1]$ que satisface las siguientes condiciones:

- $\bigoplus\,(x,y) = \bigoplus\,(y,x)$ (conmutatividad)
- $\bigoplus\,(x, \bigoplus\,(y,z)) = \bigoplus\,(\bigoplus\,(x,y),z)$ (asociatividad)
- $y \leq z \Longrightarrow \bigoplus\,(x,y) \leq \bigoplus\,(x,z)$ (monotonía)
- $\bigoplus\,(x,0) = x$ (elemento neutro 0)

Proposición 5.

La operación binaria $\bigoplus\,(R(x,y),S(x,y)) = \; máx\;(\mu_R(x,y),\; \mu_S(x,y))$ es una t-conorma:

Demostración:

- Conmutatividad: $máx\;\left(\mu_R(x,y),\; \mu_S(x,y)\right) = \; máx\;\left(\mu_S(x,y),\; \mu_R(x,y)\right)$ (Propiedad conmutativa de la función $máx$).
- Asociatividad: $máx\;((\mu_R(x,y), máx\left(\mu_S(x,y), \mu_T(x,y)\right))=$ $máx\;(máx\left(\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)\right), \mu_T(x,y))$ (propiedades de la función $máx$)

- Monotonía: $\mu_S(x,y) \leq \mu_T(x,y) \Longrightarrow$

  $\Longrightarrow máx\,(\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)) \leq máx\,(\mu_R(x,y), \mu_T(x,y))$ por propiedades de máximo de números reales.
- Elemento neutro: $máx\,(\mu_R(x,y), 0) = \mu_R(x,y)$, pues $\mu_R(x,y) \in [0,1]$

Por lo tanto $\mu_{R \cup S}(x,y) = \mu_R(x,y) \oplus \mu_S(x,y)$ □

Ejemplo 2.2.2. Las tablas dadas a continuación muestran las mismas relaciones R y S ejemplificadas en el ejemplo *2.2.1* pero esta vez con su unión.

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	1	0
x_2	0,8	1	0	0,2
x_3	0,5	0	0,4	0

S	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0	0,7	0
x_2	0,1	0,8	1	1
x_3	0,6	0,9	0,3	0,2

$R \cup S$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	1	0
x_2	0,8	1	1	1
x_3	0,6	0,9	0,4	0,2

Considerando las relaciones mencionadas, su unión, que y representara la relación: "y es mucho más grande que x, o la suma $x + y$ es cercana a 3" se muestra en la figura 2.3

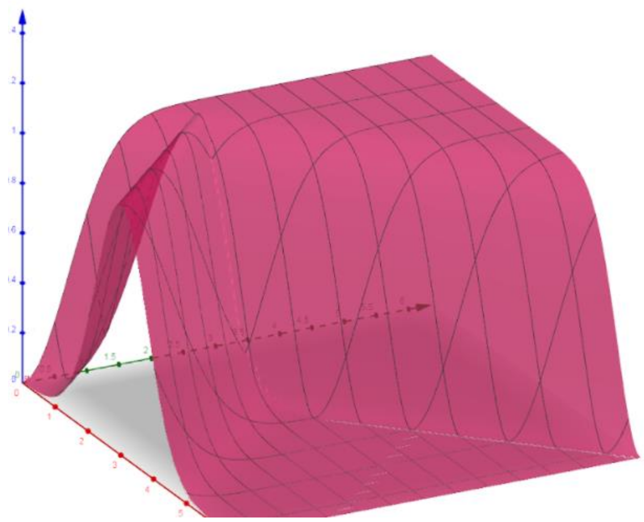


Figura 2.3. Unión de las relaciones R y S.

Producto algebraico. El producto algebraico de dos relaciones R y S, denotado $R.S$, está definido por la expresión $\mu_{R.S}(x,y) = \mu_R(x,y).\mu_S(x,y)$

El "." en el lado derecho de la igualdad es el producto de números reales.

Proposición 6

La operación $\star\,(R(x,y), S(x,y)) = \mu_R(x,y).\,\mu_S(x,y)$ es una t-norma.

Demostración:

- $\mu_{R.S}(x,y) = \mu_R(x,y).\,\mu_S(x,y) = \mu_S(x,y).\,\mu_R(x,y) = \mu_{S.R}(x,y)$
- $\mu_{R.(S.T)}(x,y) = \mu_R(x,y).\,\mu_{S.T}(x,y) = \mu_R(x,y).\,\mu_S(x,y).\,\mu_T(x,y) = \mu_{R.S}(x,y).\,\mu_T(x,y) = \mu_{(R.S).T}(x,y)$
- $\mu_S(x,y) \leq \mu_T(x,y) \Longrightarrow \mu_{R.S}(x,y) = \mu_R(x,y).\,\mu_S(x,y) \leq \mu_R(x,y).\,\mu_T(x,y) = \mu_{R.T}(x,y)$
- $\mu_{R.1}(x,y) = \mu_R(x,y).\,1 = \mu_R(x,y)$ □

Ejemplo 2.2.3. En las siguientes tablas podemos ver las relaciones R y S definidas anteriormente y su producto algebraico.

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	1	0
x_2	0,8	1	0	0,2
x_3	0,5	0	0,4	0

S	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0	0,7	0
x_2	0,1	0,8	1	1
x_3	0,6	0,9	0,3	0,2

$R.S$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,09	0	0,7	0
x_2	0,08	0,8	0	0,2
x_3	0,3	0	0,12	0

Considerando las relaciones mencionadas en el ejemplo *2.2.1*, su producto se muestra en la figura 2.4

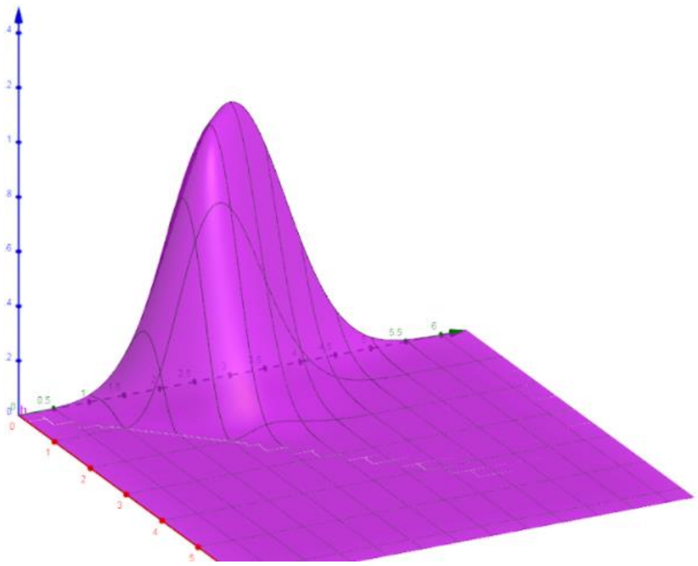


Figura 2.4. Producto de las relaciones R y S.

Suma algebraica. La suma algebraica de dos relaciones R y S, denotada $R\hat{+}S$, está definida por la expresión $\mu_{R\hat{+}S}(x,y) = \mu_R(x,y) + \mu_S(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_S(x,y)$

Proposición 7

La operación $\star\,(R(x,y),S(x,y)) = \mu_R(x,y) + \mu_S(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_S(x,y)$ es una t-conorma.

Demostración:

- $\mu_{R\hat{+}S}(x,y) = \mu_R(x,y) + \mu_S(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_S(x,y) = \mu_S(x,y) + \mu_R(x,y) - \mu_S(x,y).\mu_R(x,y) = \mu_{S\hat{+}R}(x,y)$
- $\mu_{R\widehat{+(S\hat{+}T)}}(x,y) = \mu_R(x,y) + \mu_{S\hat{+}T}(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_{S\hat{+}T}(x,y) = \mu_R(x,y) + \mu_S(x,y) + \mu_T(x,y) - \mu_S(x,y).\mu_T(x,y) - \mu_R(x,y).\big(\mu_S(x,y) + \mu_T(x,y) - \mu_S(x,y).\mu_T(x,y)\big) = \mu_R(x,y) + \mu_S(x,y) + \mu_T(x,y) - \mu_S(x,y).\mu_T(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_S(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_T(x,y) + \mu_R(x,y).\mu_S(x,y).\mu_T(x,y) = \mu_R(x,y) + \mu_S(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_S(x,y) + \mu_T(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_T(x,y) - \mu_S(x,y).\mu_T(x,y) + \mu_R(x,y).\mu_S(x,y).\mu_T(x,y) = \mu_R(x,y) + \mu_S(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_S(x,y) + \mu_T(x,y) - \big(\mu_R(x,y) + \mu_S(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_S(x,y)\big).\mu_T(x,y) = \mu_{R\hat{+}S}(x,y) + \mu_T(x,y) - \mu_{R\hat{+}S}(x,y).\mu_T(x,y) = \mu_{(R\hat{+}S)\hat{+}T}(x,y)$

- $\mu_S(x,y) \leq \mu_T(x,y) \Rightarrow \mu_{R\hat{+}S}(x,y) = \mu_R(x,y) + \mu_S(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_S(x,y) \leq \mu_R(x,y) + \mu_T(x,y) - \mu_R(x,y).\mu_T(x,y) = \mu_{R\hat{+}T}(x,y)$. Esta desigualdad vale porque $\mu_R(x,y) > 0$
- $\mu_{R\hat{+}0}(x,y) = \mu_R(x,y) + 0 - \mu_R(x,y).0 = \mu_R(x,y)$ □

Ejemplo 2.2.4. Aquí ejemplificamos las relaciones R y S y su suma algebraica.

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	1	0
x_2	0,8	1	0	0,2
x_3	0,5	0	0,4	0

S	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0	0,7	0
x_2	0,1	0,8	1	1
x_3	0,6	0,9	0,3	0,2

$R\hat{+}S$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,51	0,2	1	0
x_2	0,82	1	1	1
x_3	0,8	0,9	0,58	0,2

Considerando las relaciones mencionadas en el ejemplo *2.2.1*, su suma se muestra en la figura 2.5

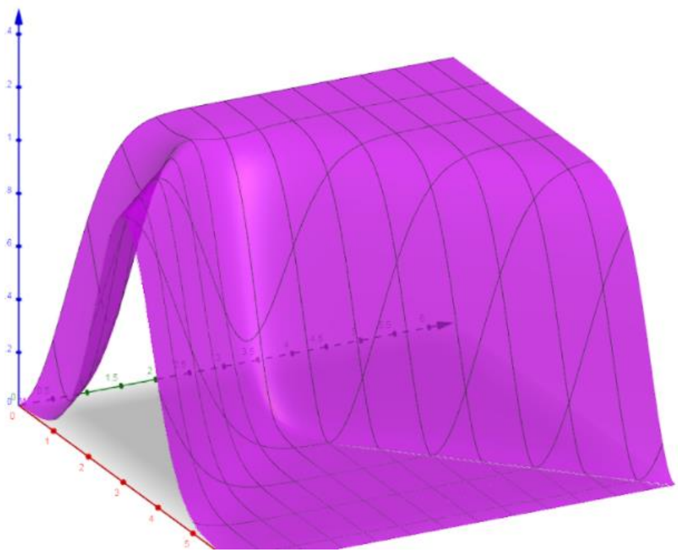


Figura 2.5. Suma algebraica de las relaciones R y S.

Composición máx-mín. Sea $R_1 \subset X\text{x}Y$ y $R_2 \subset Y\text{x}Z$. Definimos la composición máx-mín de R_1 y R_2, denotada $R_2 \circ R_1$, como

$$\mu_{R_2 \circ R_1}(x,z) = máx_y \left[mín\left(\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z)\right)\right] \text{ donde } x \in X, y \in Y \text{ y } z \in Z.$$

Ejemplo 2.2.5. En las siguientes tablas podemos ver las relaciones R y S y su composición máx-mín.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,1	0,2	0	1	0,7
x_2	0,3	0,5	0	0,2	1
x_3	0,8	0	1	0,4	0,3

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	0,3	0,4
y_2	0,2	1	0,8	0
y_3	0,8	0	0,7	1
y_4	0,4	0,2	0,3	0
y_5	0	1	0	0,8

$R_2 \circ R_1$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,4	0,7	0,3	0,7
x_2	0,3	1	0,5	0,8
x_3	0,8	0,3	0,7	1

Composición máx-producto. Sea $R_1 \subset X\text{x}Y$ y $R_2 \subset Y\text{x}Z$. Definimos la composición máx-producto de R_1 y R_2, denotada R_2 x R_1, como

$$\mu_{R_2 \text{ x } R_1}(x,z) = máx_y\left[\mu_{R_1}(x,y).\mu_{R_2}(y,z)\right] \text{ donde } x \in X, y \in Y \text{ y } z \in Z.$$

Ejemplo 2.2.6. A continuación mostramos las relaciones R y S y su composición máx-producto.

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,1	0,2	0	1	0,7
x_2	0,3	0,5	0	0,2	1
x_3	0,8	0	1	0,4	0,3

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	0,3	0,4
y_2	0,2	1	0,8	0
y_3	0,8	0	0,7	1
y_4	0,4	0,2	0,3	0
y_5	0	1	0	0,8

$R_2 \circ R_1$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,4	0,7	0,3	0,56
x_2	0,27	1	0,4	0,8
x_3	0,8	0,3	0,7	1

En este capítulo hemos definido las relaciones difusas y sus operaciones, ejemplificando las mismas a través de tablas. Se demostraron además algunas proposiciones que, junto con lo visto en capítulos anteriores, nos ayudarán a poder aplicar un sistema de lógica difusa.

En la próxima sección analizaremos las nociones de lógica difusa.

LÓGICA DIFUSA

3.1 REPASO DE LÓGICA TRADICIONAL

La lógica es el estudio de los métodos y principios del razonamiento en todas sus formas posibles.

La lógica tradicional se ocupa de las proposiciones que son enunciados lingüísticos o declarativos, a los que se les puede asignar un valor de verdad. Los posibles valores de verdad en lógica tradicional o booleana son *verdadero* y *falso*.

Las proposiciones son oraciones expresadas en algún idioma. Cada oración que representa una proposición se puede dividir fundamentalmente en un sujeto y un predicado. En otras palabras, una simple proposición puede ser expresada, en general, en la forma canónica "x es P" donde x es un símbolo de un sujeto y P designa un predicado que caracteriza una propiedad. Por ejemplo, "Austria es un país de habla alemana" es una proposición en la cual "Austria" representa un sujeto (un país en particular) y "un país de habla alemana" es un predicado que caracteriza una propiedad específica, en este caso, la propiedad de ser un país cuyos habitantes hablan idioma alemán. Esta proposición es verdadera.

En lugar de tratar con proposiciones particulares, podemos usar la forma general "x es P", donde x ahora representa cualquier sujeto de un universo designado del discurso X. A continuación, el predicado P desempeña el rol de una función definida en X, que para cada valor de x forma una proposición. Esta función normalmente se denomina predicado y es denotada $P(x)$. Claramente, un predicado se convierte en una proposición que es verdadera o falsa cuando x se sustituye por un sujeto particular de X.

A la veracidad de un elemento x en la proposición P se le puede asignar un valor de verdad binario, llamado $T_P(x)$, al igual que a un elemento en un universo se le asigna una cantidad binaria para medir su pertenencia a un conjunto particular. Para la lógica tradicional binaria (booleana), a $T_P(x)$ se le asigna un valor de 1 (verdadero) o 0 (falso).

Ejemplo 3.1.1. El predicado: $P(x)$: $x < 3$ no tiene valor de verdad. Pero para $x = 0$, el predicado se transforma en una proposición: $P(0)$: $0 < 3$, y tiene valor de verdad verdadero (o 1). En cambio, para $x = 12$, $P(12)$: $12 < 3$ es una proposición falsa.

Luego, un predicado sobre un universo de discurso X define dos conjuntos: el conjunto de verdad de P: $T(P) = \{x\ en\ X\ tal\ que\ P\ es\ verdadera\}$ y el conjunto de falsedad $F(P) = \{x\ en\ X\ tal\ que\ P\ es\ falsa\}$

Entonces, un predicado podría escribirse de la forma: P: $x\ pertenece\ a\ A$, siendo A el conjunto de verdad de P, $A = T(P)$. De esta manera, existe una relación (isomorfismo) entre los subconjuntos de X y todos los posibles predicados sobre X.

El valor de verdad del predicado P para cada x en X entonces es:

$$T_P(x) = \mu_A(x) \in \{0,1\}$$

También usaremos la notación: $T_P(x) = \mu_P(x) = \mu_A(x)$, es decir, la "función de pertenencia de una proposición" es la función de pertenencia de su conjunto de verdad.

En el ejemplo anterior: $T(P) = \{x\ en\ X\ \ /\ x < 3\} = (-\infty, 3)$ y $T_P(0) = 1$ y $T_P(12) = 0$

El razonamiento lógico es el proceso de combinar reiteradas veces proposiciones dadas en otras proposiciones. Estas combinaciones se pueden hacer de muchas formas y son derivadas de las siguientes operaciones fundamentales:

conjunción ($P \wedge Q$), donde se afirma simultáneamente la verdad de dos proposiciones P y Q;

disyunción ($P \vee Q$), donde se afirma la verdad de una o ambas proposiciones P y Q;

implicación ($P \rightarrow Q$), usualmente toma la forma de una regla SI-ENTONCES, donde la parte SI es la llamada antecedente y la parte ENTONCES, consecuente.

equivalencia ($P \leftrightarrow Q$) es la relación equivalente, es decir, P y Q son ambas verdaderas o ambas falsas.

Además, una nueva proposición puede ser obtenida de otra proposición dada anteponiendo la cláusula “es falso que…”. Esta operación se denomina negación ($\sim P$).

Las cinco operaciones lógicas definidas se pueden utilizar para crear proposiciones compuestas, es decir, proposiciones lógicas formadas conectando lógicamente dos o más proposiciones simples. Así como nos interesa la verdad de una proposición simple, la lógica tradicional también implica la evaluación de la verdad de proposiciones compuestas.

Una tabla de verdad es muy conveniente para mostrar la relación entre varias proposiciones. En la siguiente tabla de verdad se muestran las cinco operaciones mencionadas, frecuentemente aplicadas a proposiciones.

Esta sería la tabla de valores resultante de $T_r(x)$ donde r denota la proposición compuesta:

P	Q	P∧Q	P∨Q	P→Q	P↔Q	~P
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1

Una tautología es una proposición que se forma combinando otras proposiciones (P, Q, R…) y que es verdadera, a pesar de la verdad o falsedad de P, Q, R…

La tautología más importante para este trabajo es: (P→ Q) ↔ ~[P∧(~Q)]. También puede ser expresada como (P→ Q) ↔ (~P) ∨ Q.

La importancia de estas tautologías es que podemos expresar la función de pertenencia para P→ Q en términos de funciones de pertenencia de otras proposiciones P y ~Q o ~P y Q.

La lógica y la teoría de conjuntos se construyen sobre la misma estructura matemática, conocida como álgebra de Boole. Algunas de las equivalencias matemáticas más importantes entre lógica proposicional y teoría de conjuntos son las siguientes:

Lógica Proposicional	Teoría de Conjuntos
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$
$\sim$	$(\bar{\ })$

Además, hay una correspondencia entre la lógica elemental y el Álgebra Booleana (0,1). Simplemente se dan las siguientes correspondencias:

Lógica	Álgebra Booleana
T	1
F	0
$\wedge$	$\times$
$\vee$	+
$\sim$	’
$\leftrightarrow$	=

Partiendo de la tabla de verdad y del hecho de que (P→ Q) ↔ ~[P∧(~Q)] y (P→ Q) ↔ (~P) ∨ Q, y las equivalencias entre lógica y teoría de conjuntos, podemos obtener las siguientes funciones de pertenencia para las proposiciones compuestas, donde $A = T(P)$ y $B = T(Q)$. P y Q suelen estar definidas en distintos universos de discurso, entonces $A \subset X$, $B \subset Y$, siendo X e Y el universo de P y de Q respectivamente.

Conjunción: $T_{P\wedge Q}(x,y) = \mu_{P\wedge Q}(x,y) = mín\big(\mu_A(x),\ \mu_B(y)\big)$

Disyunción: $T_{P\vee Q}(x,y) = \mu_{P\vee Q}(x,y) = máx\big(\mu_A(x),\ \mu_B(y)\big)$

Negación: $T_{\sim P}(x) = 1 - \mu_A(x)$. Si $T_P(x) = 1$ entonces $T_{\sim P}(x) = 0$; si $T_P(x) = 0$ entonces $T_{\sim P}(x) = 1$

Implicación: La primera tautología para la implicación nos muestra que

$$T_{P\to Q}(x,y) = \mu_{P\to Q}(x,y) = 1 - \mu_{P\wedge\sim Q}(x,y) = 1 - mín(\mu_P(x), 1 - \mu_Q(y))$$

y la segunda tautología nos deja ver que

$T_{P\to Q}(x,y) = \mu_{P\to Q}(x,y) = \mu_{\sim P\vee Q}(x,y) = máx(1-\mu_P(x), \mu_Q(y))$.

Equivalencia: Para la equivalencia $P \leftrightarrow Q$ se deben verificar simultáneamente: Si $T_P(x) = 1$ entonces $T_Q(y) = 1$. (O lo que es lo mismo: Si $T_Q(y) = 0$ entonces $T_P(x) = 0$) y si $T_Q(y) = 1$ entonces $T_P(x) = 1$. (O lo que es lo mismo: si $T_P(x) = 0$ entonces $T_Q(y) = 0$).

Entonces, usando las expresiones anteriores se obtiene:

$$T_{P\leftrightarrow Q}(x,y) = \mu_{P\leftrightarrow Q}(x,y) = mín\left(\mu_{P\to Q}(x,y), \mu_{Q\to P}(x,y)\right)$$
$$= \text{mín}(1-\mu_{P\wedge\sim Q}(x,y), 1-\mu_{Q\wedge\sim \mathrm{P}}(x,y))$$

y también:

$$T_{P\leftrightarrow Q}(x,y) = \mu_{P\leftrightarrow Q}(x,y) = mín\left(\mu_{P\to Q}(x,y), \mu_{Q\to P}(x,y)\right)$$
$$= mín(\mu_{(\sim \mathrm{P})\vee\, \mathrm{Q}}(x,y), \mu_{(\sim \mathrm{Q})\vee\, \mathrm{P}}(x,y))$$

Ejemplo 3.1.2. $P(x)$: la temperatura exterior x es mayor a 30ºC, y $Q(y)$: el aire acondicionado está en nivel *y*=3. Se tiene la implicación: $R = P \to Q$: si la temperatura exterior es mayor a 30ºC, entonces el aire acondicionado está en nivel y = 3. La implicación es una nueva proposición definida sobre el universo: $Z = X \times Y$ donde X es el universo de todos los valores de temperatura, e Y es el universo de los posibles nieles del aire acondicionado. Algunos valores de verdad de la implicación *R* son:

$T_R(35{,}3) =$ 1, ya que P(35) es verdadera y Q(3) es verdadera.

$T_R(20{,}3) =$ 1, ya que P(20) es falsa

$T_R(22{,}0) =$ 1, ya que P(22) es falsa

$T_R(35{,}1) =$ 0 ya que P(35) es verdadera y Q(1) es falsa.

En lógica tradicional hay dos importantes reglas de inferencia: Modus Ponens y Modus Tollens.

En el Modus Ponens se tiene "$x \in A$", "si $x \in A$ luego $y \in B$" por lo tanto "$y \in B$". Es decir se expresa como (P∧(P→Q)) →Q.

En el Modus Tollens se tiene “$y \notin B$”, “si $x \in A$ luego $y \in B$” por lo tanto “$x \notin A$”. Se expresa como $(\sim Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \sim P$.

3.2 LÓGICA DIFUSA

Así como realizamos una analogía entre la teoría de conjuntos difusos con la de conjuntos ordinarios, podemos tener el mismo criterio para la teoría de lógica difusa, ya que está basada en la conocida lógica tradicional. Sin embargo, en las aplicaciones de ingeniería de lógica difusa, la noción de “causa y efecto” es el pilar para poder modelar, mientras que en la lógica tradicional no lo es.

Uno de los componentes más importantes de un sistema de lógica difusa son las reglas, que son expresadas como implicaciones lógicas. Una regla representa una relación de implicación entre dos proposiciones, y en general tienen la forma: si $x \in A$, entonces $y \in B$. Su función de pertenencia es denotada $\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$.

La diferencia fundamental entre proposiciones tradicionales y proposiciones difusas está en el rango de sus valores de verdad. Mientras que una proposición clásica debe ser verdadera o falsa, la verdad o falsedad de las proposiciones difusas es una cuestión de grado. Suponiendo que la verdad y la falsedad se expresan mediante los valores 1 y 0, respectivamente, el grado de verdad de cada proposición difusa se expresa mediante un número en el intervalo unitario [0, 1].

Ejemplo 3.2.1.

El cliente A tiene grandes inversiones en el Banco. Esta afirmación puede no tener un valor de verdad 0 o 1. El dato preciso que se tiene es el monto de la inversión del cliente. Pero que ese monto sea una “gran inversión” o no, no es una cuestión binaria.

Ejemplo 3.2.2.

Si el cliente tiene grandes inversiones en el Banco, es altamente rentable. Este es un ejemplo de una implicación difusa. Relaciona dos proposiciones difusas. Los datos con los que se cuenta es el monto de la inversión del cliente, y el rendimiento de la inversión en un determinado año. Que ese resultado sea “altamente rentable” es una afirmación difusa.

Para comenzar con lógica difusa, podemos reemplazar las dos tautologías de lógica tradicional por funciones de pertenencia difusas. Por lo tanto $\mu_{A\to B}(x,y) \in [0,1]$ mide el grado de verdad de la relación de implicación "si $x \in A$, entonces $y \in B$", donde ahora A y B son conjuntos difusos:

$$\mu_{A\to B}(x,y) = 1 - mín(\mu_A(x), 1 - \mu_B(y))$$

$$\mu_{A\to B}(x,y) = máx(1 - \mu_A(x), \mu_B(y))$$

Los conectores lógicos de negación, disyunción, conjunción e implicación son también definidos para una lógica difusa.

Obtenemos:

Conjunción: $T_{P\wedge Q}(x,y) = \mu_{P\wedge Q}(x,y) = mín\big(\mu_A(x),\ \mu_B(y)\big)$

Disyunción: $T_{P\vee Q}(x,y) = \mu_{P\vee Q}(x,y) =\ máx\big(\mu_A(x),\ \mu_B(y)\big)$

Negación: $T_{\sim P}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Implicación: Similar a la implicación en lógica tradicional:

$$T_{P\to Q}(x,y) = \mu_{P\to Q}(x,y) = 1 - \mu_{P\wedge\sim Q}(x,y) = 1 - mín(\mu_P(x), 1 - \mu_Q(y))$$

y también

$$T_{P\to Q}(x,y) = \mu_{P\to Q}(x,y) = \mu_{\sim P\vee Q}(x,y) = máx(1 - \mu_P(x), \mu_Q(y)).$$

Equivalencia: Expendiendo la equivalencia de lógica binaria al caso difuso:

$$\begin{aligned} T_{P\leftrightarrow Q}(x,y) = \mu_{P\leftrightarrow Q}(x,y) &= mín\left(\mu_{P\to Q}(x,y), \mu_{Q\to P}(x,y)\right) \\ &= \mathrm{mín}(1 - \mu_{P\wedge\sim Q}(x,y), 1 - \mu_{Q\wedge\sim \mathrm{P}}(x,y)) \end{aligned}$$

y también:

$$\begin{aligned} T_{P\leftrightarrow Q}(x,y) = \mu_{P\leftrightarrow Q}(x,y) &= mín\left(\mu_{P\to Q}(x,y), \mu_{Q\to P}(x,y)\right) \\ &= mín(\mu_{(\sim \mathrm{P})\vee\, \mathrm{Q}}(x,y), \mu_{(\sim \mathrm{Q})\vee\, \mathrm{P}}(x,y)) \end{aligned}$$

En todos los casos, P y Q son ahora proposiciones difusas, y A y B los conjuntos difusos que definen.

En lógica difusa, Modus Ponens se extiende a Modus Ponens Generalizado:

"$ux \in A^*$", "si $ux \in A$ luego $vy \in B$" por lo tanto "$vy \in B^*$". En este caso el conjunto borroso A^* no es necesariamente el mismo que A, y el conjunto borroso B^* podría no ser el mismo que B.

Hoy en día para las aplicaciones de lógica difusa en ingeniería, se utilizan las siguientes expresiones, derivadas de las inferencias de *mínimo* y *producto*:

$$\mu_{A\rightarrow B}(x,y) = mín(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

$$\mu_{A\rightarrow B}(x,y) = \mu_A(x)\mu_B(y)$$

Ambas implicaciones preservan la relación de causa y efecto y son de gran utilidad para los ingenieros, dada su simplicidad.

La siguiente tabla demuestra que las inferencias de *mínimo* y *producto* no concuerdan con la definición de implicación lógica proposicional aceptada:

$\mu_p(x)$	$\mu_q(y)$	$mín(\mu_p(x), \mu_q(y))$	$\mu_p(x).\mu_q(y)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Sin embargo, estas definiciones, inferencia de mínimo, e inferencia de producto, son ampliamente usadas en los sistemas de lógica difusa diseñados para aplicaciones de ingeniería.

Existen también otras expresiones para la implicación difusa (Ross, 2004). En cada aplicación específica, la elección del operador de implicación queda a cargo del diseñador del sistema difuso, ya que el desempeño de una u otra expresión depende del contexto.

SISTEMAS DE LÓGICA DIFUSA

4.1 BASE DE REGLAS DIFUSAS.

Una base de reglas difusas es un conjunto de reglas de inferencia del tipo SI-ENTONCES, que pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$R^{(l)}$: SI u es F^l, ENTONCES v es G^l

Donde u es un vector de variables lingüísticas de entradas al sistema y v es la salida. Si hay p variables de entrada, el antecedente de la regla se puede formular con la conjunción de las pertenencias de cada variable a determinado conjunto:

$R^{(l)}$: SI u_1 es F_1^l y u_2 es F_2^l y… u_p es F_p^l, ENTONCES v es G^l

donde F_i^l y G^l son conjuntos difusos en $U_i \subset R$ y $V \subset RS$ respectivamente,

$u = \left(u_1, \dots, u_p\right)^T \in U_1 \text{x} \dots \text{x} U_p$, y $v \in V$. u y v son variables lingüísticas, sus valores numéricos son $x \in U$ y $y \in V$, respectivamente.

Esta regla tiene la particularidad de que es *multi-antecedente* (combina varias variables en el antecedente) y es la más utilizada en el diseño de sistemas difusos.

Ejemplo 4.1.1.

$R^{(1)}$: SI un cliente bancario constituye un Plazo Fijo por poco dinero, si lo mantiene por un plazo de muchos días y si el segmento al cual pertenece es medio, ENTONCES se le ofrecerá una TNA de poco interés.

En este caso, u_1= Inversión a Plazo Fijo, F_1^1= poco dinero, u_2= Plazo, F_2^1= muchos días, u_3= Segmento, F_3^1= medio, v= TNA y G^1= poco interés.

Ejemplo 4.1.2.

$R^{(2)}$: SI un cliente de tarjeta de crédito tiene un promedio de consumo mensual mediano y si posee adherido a la tarjeta los débitos automáticos de muchos servicios, ENTONCES tendrá bonificado parcialmente el cargo de renovación anual.

En este caso, u_1= Promedio de consumo mensual en tarjeta de crédito, F_1^2= mediano, u_2= débitos automáticos adheridos, F_2^2= muchos servicios, v= Bonificación del cargo de renovación anual y G^2= parcial.

Un sistema difuso está formado por varias reglas difusas con diferentes consecuentes, ya que una regla con multi-antecedente y multi-consecuente siempre podrá ser descompuesta en un conjunto de reglas con multi-antecedente pero un solo consecuente.

Las reglas surgen del saber, del know how del problema que se está considerando. Muchas veces, la regla no viene expresada en el formato expuesto anteriormente, ya sea porque en el antecedente no se tienen todas las variables del problema, o porque la pertenencia de las variables de entrada a los correspondientes subconjuntos no está unida solo por una conjugación (y), etc.

A continuación, se describe cómo transformar una regla al formato establecido:

1. Reglas de SI incompletas:

Supongamos que creamos una base de reglas donde hay p entradas, pero algunas reglas tienen antecedentes que son solo un subconjunto de las p entradas. Por ejemplo,

SI u_1 es F_1^l y u_2 es F_2^l y…y u_m es F_m^l, ENTONCES v es G^l.

Estas reglas se aplican sin importar $u_{m+1}, \dots, u_p$. Se pueden ingresar con el formato de reglas completas, tratando por ejemplo a los antecedentes $u_{m+1}, \dots, u_p$ como elementos de un conjunto borroso INCOMPLETO (llamado IN) donde, por definición, $\mu_{IN}(u) = 1$ $\forall u \in R$; es decir

SI u_1 es F_1^l y u_2 es F_2^l y…y u_m es F_m^l, ENTONCES v es G^l

Es equivalente a

SI u_1 es F_1^l y u_2 es F_2^l y…y u_m es F_m^l y $u_{m+1} \in$ IN... y $u_p \in$ IN, ENTONCES v es G^l.

2. Reglas Mixtas:

No todas las reglas utilizan el conector *"y"*, algunas usan el conector *"o"* y otras una mezcla de ambos conectores. Estas reglas pueden ser descompuestas en otras reglas equivalentes, utilizando técnicas de lógica proposicional tradicional. Supongamos por ejemplo que tenemos la siguiente regla:

SI (u_1 es F_1^l y u_2 es F_2^l y…y u_m es F_m^l), o (u_{m+1} es F_{m+1}^l y…y u_p es F_p^l), ENTONCES v es G^l.

Esta regla puede ser expresada como las siguientes dos reglas:

$R^{(1)}$: SI u_1 es F_1^l y u_2 es F_2^l y… y u_m es F_m^l, ENTONCES v es G^l

$R^{(2)}$: SI u_{m+1} es F_{m+1}^l y…y u_p es F_p^l, ENTONCES v es G^l.

Ambas reglas son reglas de SI incompletas.

3. Reglas de proposición difusa:

Algunas reglas no parecen tener ningún antecedente, son proposiciones que involucran conjuntos borrosos. Por ejemplo, "v es G^l" es una regla. Claramente, este es un caso extremo de una regla de SI incompleta, y además puede ser formulada así:
SI $u_1 \in$ IN y $u_2 \in$ a IN y…y $u_p \in$ a IN, ENTONCES v es G^l.

4. Reglas comparativas:

Son del estilo "cuanto más pequeño es u, más grande es v". Deben ser primero reformuladas como reglas de SI-ENTONCES, el ejemplo anterior quedaría expresado como "SI u es S, ENTONCES v es B", donde S es el conjunto borroso que representa "más pequeño" y B es el conjunto borroso que representa "más grande".

5. Reglas "a menos que":

Son escritas utilizando el conector "a menos que" y pueden ser expresadas en el formato dado inicialmente usando operaciones lógicas, incluyendo las Leyes de Morgan. Por ejemplo, la regla v es G^l a menos que u_1 es F_1^l y u_2 es F_2^l y… y u_p es F_p^l puede ser expresada como:

SI no (u_1 es F_1^l y u_2 es F_2^l y… y u_p es F_p^l), ENTONCES v es G^l.

Usando las Leyes de Morgan, $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$, puede ser reescrita como:

SI u_1 no es F_1^l o u_2 no es F_2^l o… o u_p no es F_p^l, ENTONCES v es G^l.

Aquí se trabaja "no es F_i^l" como un conjunto borroso, y luego se descomponen las reglas mixtas en una colección de p reglas de SI incompletas, cada una de la forma:

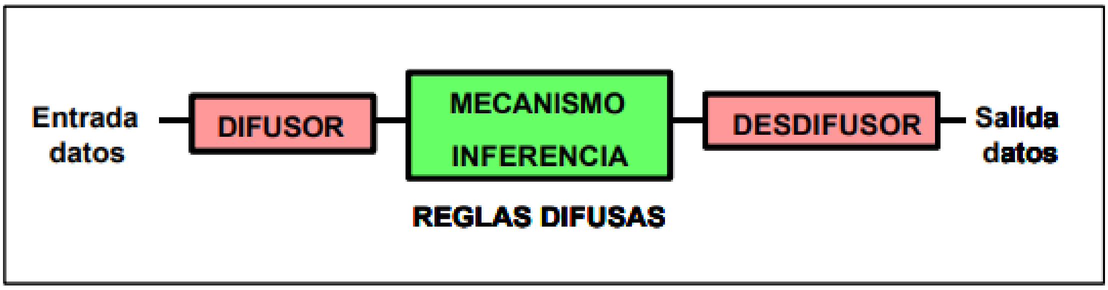
SI u_i no es F_i^l, ENTONCES v es G^l, con $i = 1,2, \dots, p$.

6. Reglas de cuantificador:

Son reglas que incluyen ciertos cuantificadores como "algunos" o "todos". Debido a la dualidad entre la lógica proposicional y la teoría de conjuntos, en las reglas con el cuantificador "algunos" debemos aplicar el operador unión "∪" a los antecedentes o consecuentes para los cuales aplica el "algunos", mientras que a las reglas con el cuantificador "todos" debemos aplicarles el operador intersección "∩" a aquellos antecedentes o consecuentes para los que aplica el "todos".

4.2 SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSA

El esquema de un sistema basado en técnicas de lógica difusa se presenta en la figura:



El sistema está compuesto por los siguientes bloques:

- **Bloque Difusor**: La difusión es el proceso de transformar los datos ordinarios en difusos. Estos datos de entrada al sistema son cantidades numéricas concretas, precisas. Las reglas de inferencia involucran antecedentes borrosos. Entonces, es necesario hacer difusos los datos, asignándoles un grado de pertenencia a cada conjunto borroso. El bloque difusor es la etapa en la cual, a cada variable de entrada se le asigna un grado de pertenencia a cada uno de los conjuntos difusos que se ha considerado, mediante las funciones de pertenencia asociadas a estos conjuntos difusos. Las entradas a este bloque son valores numéricos de las variables de entrada y las salidas son grados de pertenencia a los conjuntos difusos considerados.

- **Bloque de inferencia**: Es el bloque que, mediante los mecanismos de inferencia, relaciona conjuntos difusos de entrada y de salida y que representa a las reglas que definen el sistema. Las entradas a este bloque son conjuntos difusos (grados de pertenencia) y las salidas son también conjuntos difusos, asociados a la variable de salida.

- **Desdifusor**: Es el bloque en el cual a partir del conjunto difuso obtenido en el mecanismo de inferencia y mediante los métodos matemáticos de desdifusión, se obtiene un valor numérico de la variable de salida, es decir, el resultado.

A continuación se explicarán en detalle cada una de las componentes del sistema lógico difuso.

4.2.1 BLOQUE DIFUSOR.

El ingreso al bloque difusor está constituido por los datos de las variables de interés para el estudio. La salida es un conjunto difuso conformado por los grados de pertenencia de las variables de entrada a cada uno de los conjuntos difusos considerados.

El proceso implica conocer o asumir las respectivas funciones de pertenencia en el bloque difusor, para ser más específico, se puede decir que a cada variable de entrada se le asigna un grado de pertenencia a cada uno de los conjuntos difusos que se han especificado mediante las funciones que se desean realizar en el conjunto difuso. Este bloque es utilizado para establecer las variables de entrada del juego, asignando los grados de pertenencia del conjunto difuso.

4.2.2 MECANISMOS DE INFERENCIA.

Los mecanismos de inferencia son aquellos en los que se utilizan los principios de lógica difusa (explicados en el Capítulo III) para realizar un mapeo de los conjuntos difusos de entrada a los conjuntos difusos de salida. Cada regla es interpretada como una implicación difusa. Es decir, el bloque de inferencia es aquel en el cual se realiza la “traducción matemática” de las reglas difusas: estas reglas modelan el sistema, pero para poder trabajar con ellas y extraer un resultado se debe evaluar matemáticamente la información que reflejan. Como se mencionó anteriormente, las reglas más utilizadas para diseñar un sistema basado en lógica difusa toman la forma:

SI u_1 es F_1 y u_2 es F_2 y … y u_p es F_p, ENTONCES v es G

Podemos decir que la implicación de cada regla (el conectivo lógico ENTONCES) es un conjunto difuso cuya función de pertenencia sería $\mu_{F\to G}(x,y)$ donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$.

El resultado de evaluar el multi-antecedente también resulta en un conjunto difuso con función de pertenencia:

$$\mu_{F_x}(x) = \mu_{F_1}(x_1) \star \mu_{F_2}(x_2) \star \dots \star \mu_{F_p}(x_p)$$

donde $\star$ representa una t-norma.

Además, como se mencionó en el capítulo anterior, podemos asociar las reglas difusas al Modus Ponens Generalizado: cada regla $R^{(l)}$determina un conjunto difuso G_l que es el resultado de la composición entre el conjunto difuso resultante de evaluar el antecedente y el conjunto difuso resultante de la implicación, es decir, $G_l = F_x \circ R^{(l)}$. La función de pertenencia asociada a estos conjuntos difusos de salida es:

$$\mu_{G_l}(y) = \mu_{F_x} \circ R^{(l)} = \max_{x \in F_x}(\mu_{F_x}(x) \star \mu_{F\to G}(x,y))$$

donde $\star$ es una t-norma. Los casos más usados son la t-norma producto (composición max-product) o la t-norma mínimo (composición max-min). Existen otros métodos usados para esta composición (Ross, 2004), pero los mencionados aquí son los más aplicados.

Y finalmente, el conjunto difuso de salida $G = F_x \circ [R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(l)}]$ es el resultado de la agregación de todas las reglas que componen la base de reglas, es decir, de la combinación de los conjuntos difusos G_l resultantes de todas las reglas. Esta combinación se realiza generalmente mediante una t-conorma ya que, aunque no hay una razón teórica que argumente que esta sea la única manera de hacerlo (de hecho existen y funcionan los sistemas difusos aditivos y la adición no es una t-conorma), en aplicaciones a la ingeniería se obtienen resultados correctos y razonables usando este tipo de operadores. Entonces concluimos que:

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_l.$$

Ahora bien, todo lo visto hasta ahora es resuelto a través de fórmulas. A veces, sin embargo, es útil poder realizar el cálculo de inferencia manualmente con algunas reglas para comprobar los programas informáticos o para verificar las operaciones de inferencia. Es decir, utilizar métodos gráficos que emulan el proceso de inferencia y que hacen que los cálculos manuales que implican algunas reglas simples sean sencillos.

Existe un método de inferencia, sistema Mamdani (debido a Mamdani y Assilian [1975]) y es el más común en la práctica y en la literatura. Para comenzar la ilustración general de esta idea, consideramos un sistema simple de dos reglas, donde cada regla comprende dos antecedentes y un consecuente. Esto es análogo a un sistema difuso de entrada doble y salida única. Los procedimientos gráficos ilustrados se pueden ampliar fácilmente y se mantienen para bases de reglas difusas (o sistemas difusos) con cualquier número de antecedentes (entradas) y consecuentes (salidas), como se ilustra en el siguiente capítulo.

Un sistema difuso con dos entradas no interactivas x_1 y x_2 (antecedentes) y una sola salida y (consecuente) es descrito por una colección de r proposiciones lingüísticas SI-ENTONCES en la forma Mamdani:

SI x_1 es A_1^k y x_2 es A_2^k, ENTONCES y^k es B^k, con $k = 1,2,\dots,r$.

donde A_1^k y A_2^k son los conjuntos difusos que representan los k-ésimos pares de antecedentes, y B^k es el conjunto difuso que representa el k-ésimo consecuente.

Ejemplo de sistema Mamdani

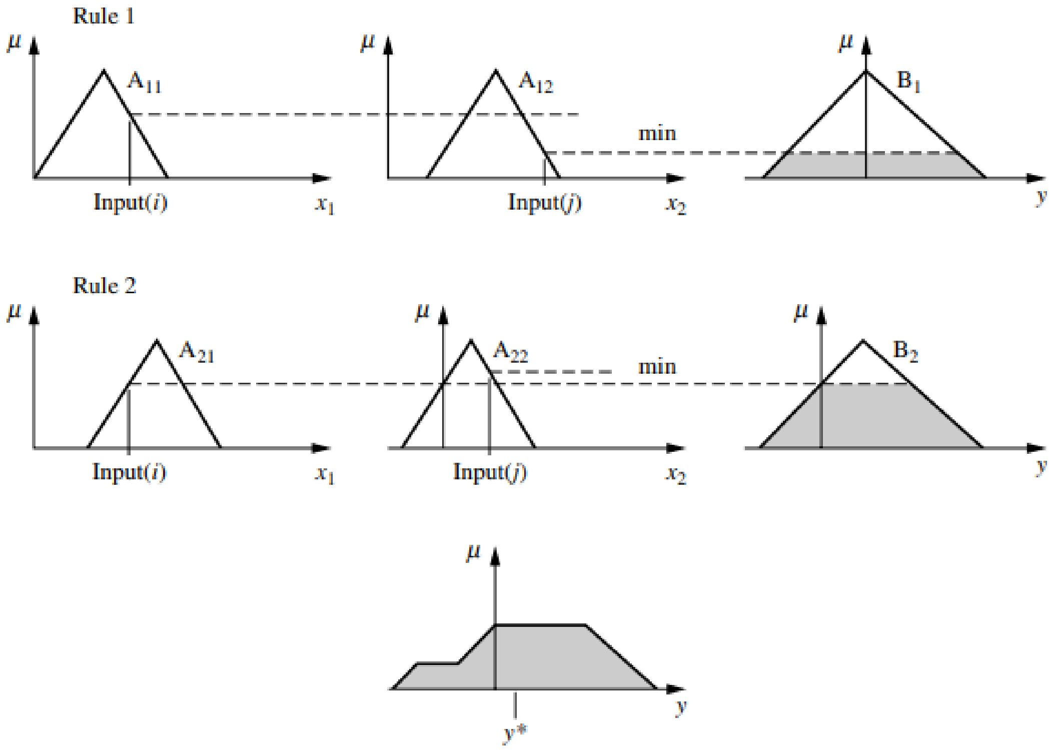
Las entradas x_1 y x_2 son valores ordinarios. El sistema se describe SI x_1 es A_1^k y x_2 es A_2^k, ENTONCES y^k es B^k, con $k = 1,2,\dots,r$. Luego, las funciones de pertenencia se describen:

$$u(x_1) = \delta\big(x_1 - input(i)\big) = \begin{cases} 1 & x_1 = input(i) \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$$u(x_2) = \delta\big(x_2 - input(j)\big) = \begin{cases} 1 & x_2 = input(j) \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

La salida para las reglas r estará dada por:

$$u_{B^k}(y) = \max_k[\min [u_{A_1^k}(input(i)).\ u_{A_2^k}(input(j))]], \text{ con } k = 1,2, \dots, r.$$



La ecuación de arriba tiene una interpretación gráfica muy simple, como se observa en los gráficos. Allí se ilustra el análisis gráfico de dos reglas, donde A_{11} y A_{12}se refieren al primer y segundo antecedentes difusos de la primera regla, respectivamente, y B_1 refiere al consecuente difuso de la primera regla; A_{21} y A_{22} refieren al primer y segundo antecedentes difusos, respectivamente, de la segunda regla, y B_2 refiere al consecuente difuso de la segunda regla.

La función mínimo en la ecuación surge porque los pares de antecedentes dados en la estructura de la regla general para este sistema están conectados por un conector lógico "y". El valor mínimo de pertenencia para los antecedentes se propaga a través del consecuente y trunca la función de pertenencia para el consecuente de cada regla. Esta inferencia gráfica se hace para cada regla. Luego, se agregan las funciones de pertenencia para cada regla, usando el equivalente gráfico de cualquiera de las ecuaciones. En estos gráficos las reglas son disyuntivas.

4.2.3 BLOQUE DESDIFUSOR.

El bloque desdifusor realiza la función contraria al difusor. El difusor tiene como entradas valores concretos de las variables de entrada y como salidas grados de pertenencia a conjuntos difusos (pertenecientes al $[0,1]$). La entrada al bloque desdifusor es el conjunto difuso de salida, resultado del bloque de inferencia, y la salida es un valor concreto de la variable de salida. Para obtener, a partir del conjunto difuso de salida que resulta de la agregación de todas las reglas, un resultado escalar, se aplican métodos matemáticos. Ejemplos sencillos de algunos de estos métodos de cálculo son:

- **Método del máximo**: se elige como valor para la variable de salida aquel para el cual la función de pertenencia del conjunto difuso de salida es máxima. En general no es un método óptimo, ya que este valor máximo puede ser alcanzado por varias salidas.
- **Método de la media máxima**: Se determinan los valores para los cuales la función de pertenencia del conjunto difuso de salida es máxima. Luego se toma la media de esos valores como valor de salida.

- **Método del centroide**: utiliza como salida del sistema el centro de gravedad de la función de pertenencia de salida. Matemáticamente:
$$\bar{y} = (\int_S y\mu_B(y)\,dy)/(\int_S \mu_B(y)\,dy)$$
donde S denota el soporte de $\mu_B(y)$. Por lo general S se discretiza, para poder aproximar $\bar{y}$ por la siguiente fórmula:
$$\bar{y} = (\sum_{i=1}^{I} y_i\,\mu_B(y_i))/(\sum_{i=1}^{I} \mu_B(y_i))$$

  Es el método más utilizado en aplicaciones de la lógica difusa a la ingeniería ya que se obtiene una solución única, aunque a veces es difícil de calcular.

- **Método de la altura**: se calcula para cada regla el centro de gravedad del conjunto difuso de salida B_l (llamado $\overline{y^l}$, asociado a la activación de la regla $R^{(l)}$) y después se calcula la salida del sistema como la media ponderada:
$$y_h = (\sum_{l=1}^{M} \overline{y^l}\,\mu_{B^l}(\overline{y^l}))/(\sum_{l=1}^{M} \mu_{B^l}(\overline{y^l}))$$

Aunque este método es fácil de usar, tiene un problema que puede no ser obvio al comienzo. Mientras que y_h usa de forma completa cada función de pertenencia del antecedente, porque esta información está en $\mu_{B^l}(\overline{y}^l)$, no hace uso de forma completa de la función de pertenencia del consecuente. Solo utiliza el centro del soporte, $\overline{y}^l$, de la función de pertenencia del consecuente, por este motivo se suele utilizar el método de altura modificado.

- **Método de la altura modificado**: Como en el método de la altura, llamamos $\overline{y}^l$ al centro de gravedad del conjunto difuso de salida B_l. En este método primero se evalúa $\mu_{B^l}(y)$ en $\overline{y}^l$ y luego se calcula la salida del sistema como:

$$y_{hm} = (\sum_{l=1}^{M} \overline{y}^l \mu_{B^l}(\overline{y}^l)/\delta^{l^2})/(\sum_{l=1}^{M} \mu_{B^l}(\overline{y}^l)/\delta^{l^2})$$

donde δ^l es una medida de propagación del consecuente para la regla $R^{(l)}$. Este método es también fácil de usar, aunque el parámetro δ^l debe ser tan bien especificado como $\overline{y}^l$ y $\mu_{B^l}(\overline{y}^l)$.

CAPÍTULO V

DISEÑO DE UN SISTEMA DE LÓGICA DIFUSA APLICADO A LA ESTRATEGIA DE RETENCIÓN DE CLIENTES DE UNA ENTIDAD FINANCIERA BANCARIA

5.1 INTRODUCCIÓN.

En una entidad financiera bancaria multinacional, dado el contexto macroeconómico actual, se decidió maximizar las tarifas provocando una aceleración en las bajas de clientes, en todos los segmentos.

Analizando el problema, se detecta que anualmente se pierde una gran cantidad de clientes. El 25% de las personas que dan de baja sus productos en el Banco, posee un índice de rentabilidad mayor al promedio y además concentra el 70% del costo total de bajas. A esto se le suma un contexto desafiante para la adquisición de nuevos clientes, producto de políticas cada vez más exigentes en un mercado con mayor apetito de riesgo e inversión (marketing, costos de adquisición, etc.).

En consecuencia, crece la relevancia de trabajar en retención y es por ello que se decide realizar una estrategia para retener a cada cliente de cada segmento que manifieste su baja del Banco.

En este capítulo se diseña un sistema de lógica difusa para que a cada cliente se le asigne un índice de rentabilidad entre 0 y 10, de actualización constante, donde 0 es un cliente no rentable y 10 es un cliente altamente rentable. Este índice permitirá, mediante una matriz, determinar qué beneficio se le puede ofrecer al cliente.

Los beneficios, ordenados de mayor a menor rentabilidad, son los siguientes:

- Tasa preferencial en Plazos Fijos;
- Descuentos en Supermercados, Combustibles y Restaurantes con Tarjeta de Débito;
- Devolución por compras con Tarjeta de Crédito en cuotas;
- Bonificación de Paquete de productos por 3 meses;
- Bonificación del cargo de renovación anual de la Tarjeta de Crédito.

Los clientes con índices de rentabilidad altos serán derivados con el Gerente de la Sucursal y se les podrá ofrecer más de 1 beneficio simultáneamente. A los clientes con índice 0 no se les otorgará beneficio alguno, procediendo directamente a la baja solicitada.

5.2 DISEÑO.

Variables

Para el diseño del sistema de lógica difusa, se tienen en cuenta las siguientes variables:

- Antigüedad del cliente;
- Promedio de inversiones en Cajas de Ahorro, Cuentas Corrientes, Plazos Fijos y Fondos de Inversión;
- Score Veraz.

Estas son variables lingüísticas, definidas en los siguientes conjuntos difusos:

- "antiguo", "medio", "nuevo" para antigüedad,
- "bajo", "medio", "alto" para promedio de inversiones
- "bajo", "medio", "alto" para el score veraz.

Reglas de inferencia difusa a considerar

Se define una base de reglas con 27 reglas. Cada regla tiene un antecedente que involucra las tres variables, y un consecuente que se aplica al índice de rentabilidad (salida del sistema). Las 27 reglas se muestran en forma de tabla a continuación, y luego se ejemplifican algunas de ellas en el formato dado en el Capítulo IV.

VERAZ BAJO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	BAJO	MEDIO	MEDIO
Medio	BAJO	BAJO	MEDIO
Nuevo	BAJO	BAJO	BAJO

VERAZ MEDIO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	MEDIO	MEDIO	ALTO
Medio	MEDIO	MEDIO	MEDIO
Nuevo	BAJO	MEDIO	MEDIO

VERAZ ALTO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	MEDIO	ALTO	ALTO
Medio	MEDIO	MEDIO	ALTO
Nuevo	MEDIO	MEDIO	MEDIO

$R^{(1)}$: SI el Score de Veraz del cliente es “bajo”, su promedio de inversiones es “bajo” y es un cliente “antiguo”, ENTONCES el índice de rentabilidad será “bajo”.

$R^{(2)}$: SI el Score de Veraz del cliente es “bajo”, su promedio de inversiones es “medio” y es un cliente “antiguo”, ENTONCES el índice de rentabilidad será “medio”.

…

…

…

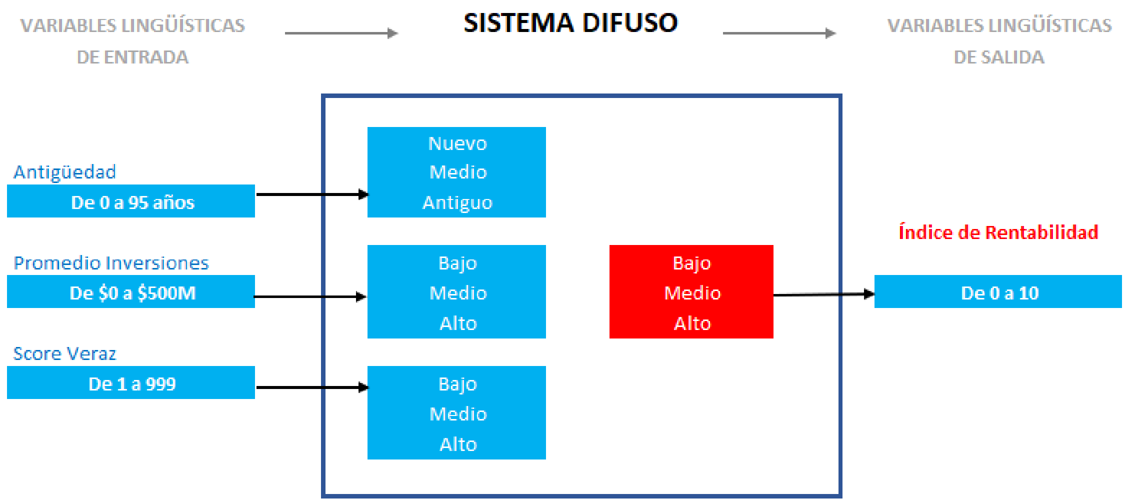
$R^{(10)}$: SI el Score de Veraz del cliente es “medio”, su promedio de inversiones es “bajo” y es un cliente “antiguo”, ENTONCES el índice de rentabilidad será “medio”.

Análogamente, se pueden detallar el total de las 27 reglas de las tablas.

Dichas reglas son *multi-antecedente* (combinan varias variables en el antecedente) y son del tipo más utilizado en el diseño de sistemas difusos.

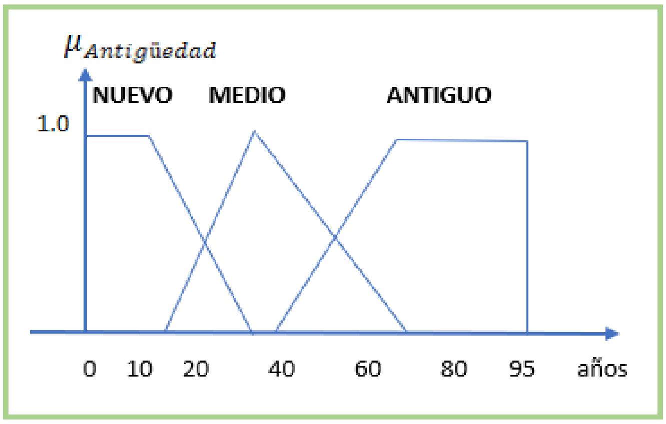
Desarrollo del sistema difuso para el problema considerado.

Las componentes del sistema difuso que se está diseñando se pueden visualizar en el siguiente gráfico

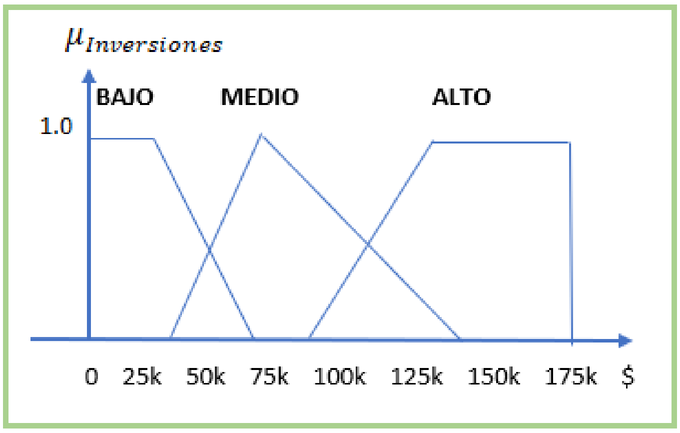


Para el primer bloque del sistema se deben definir las funciones de pertenencia para las variables de entrada y de salida. Se utilizarán funciones de tipo triangular y trapezoidal. Se mostrarán en forma gráfica las funciones de pertenencia para todas las variables, y luego la expresión analítica de las funciones de pertenencia del índice de rentabilidad.

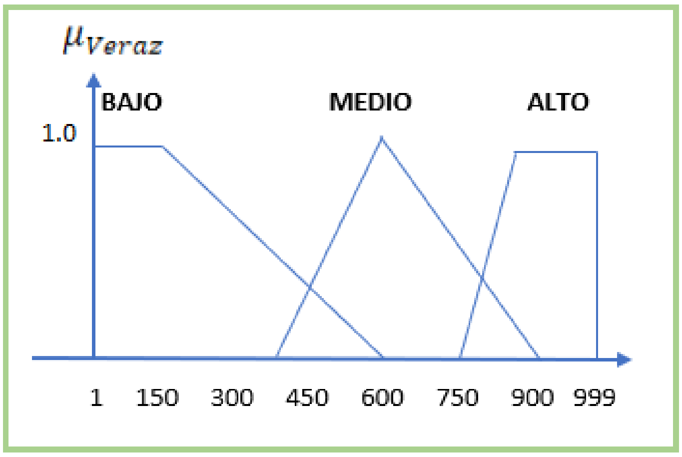
Antigüedad



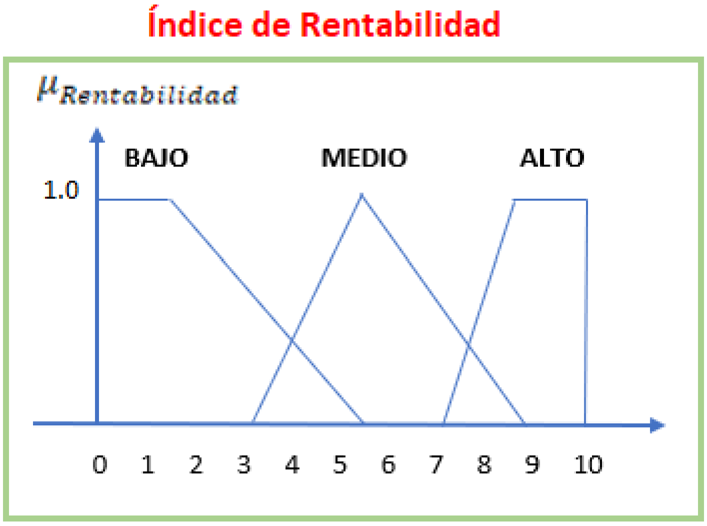
Promedio de Inversiones



Score Veraz



FUNCIONES DE PERTENENCIA
DE SALIDA



A continuación se muestran las expresiones analíticas de las funciones de pertenencia del índice de rentabilidad.

Para "BAJO"

$$\mu_{Bajo}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0, 1.5) \\ -\dfrac{1}{4}x + 1.35 & si\ x \in [1.5,5.4) \\ 0 & si\ x \in [5.4, 10] \end{cases}$$

Para "MEDIO"

$$\mu_{Medio}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0,3.2] \cup [9,10] \\ \dfrac{13}{28}x - \dfrac{52}{35} & si\ x \in (3.2,5.4) \\ -\dfrac{5}{18}x + \dfrac{5}{2} & si\ x \in [5.4, 9) \end{cases}$$

Para "ALTO"

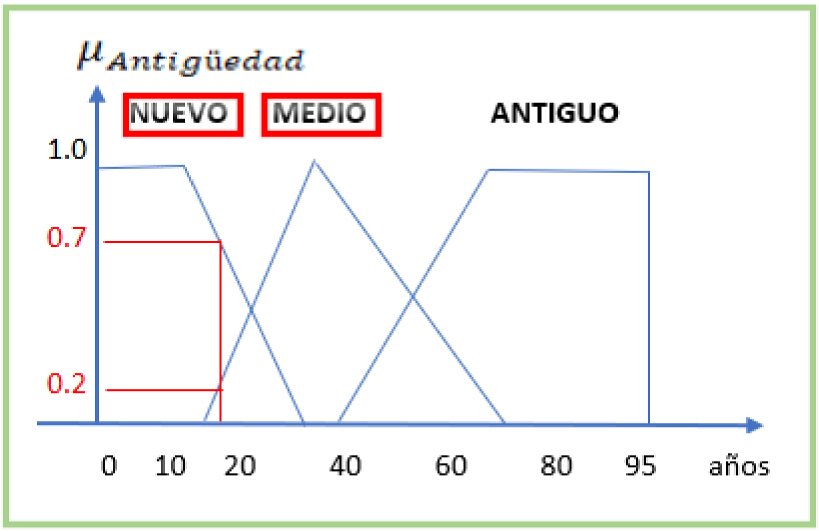
$$\mu_{Alto}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0; 7) \\ \dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{2} & si\ x \in [7,9) \\ 1 & si\ x \in [9, 10] \end{cases}$$

5.3 APLICACIÓN.

Se hallará el índice de rentabilidad para el caso de un cliente con 15 años de antigüedad, $85k de promedio de inversiones y un score en Veraz de 950.

INFERENCIA DIFUSA

Antigüedad



$$
\begin{cases}
\mu_{Antigüedad-nuevo}(15) = 0.7 \\
\mu_{Antigüedad-medio}(15) = 0.2 \\
\mu_{Antigüedad-antiguo}(15) = 0
\end{cases}
$$

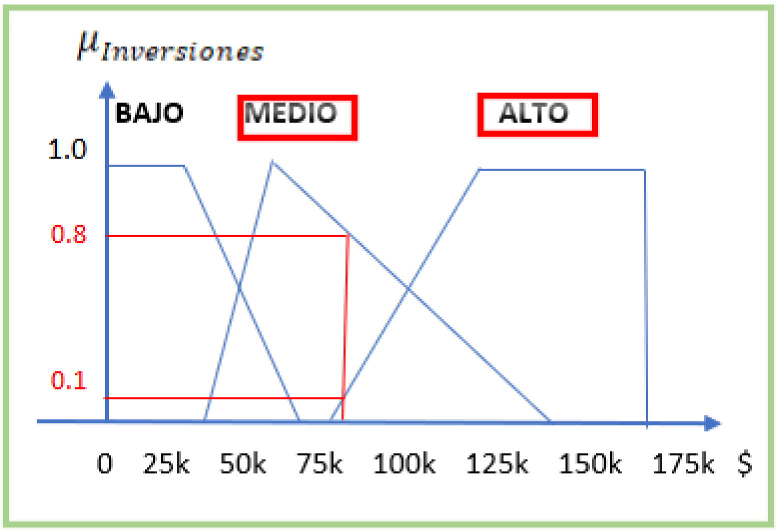
Es decir, solo se activan las reglas para "nuevo" y "medio":

VERAZ BAJO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	BAJO	MEDIO	MEDIO
Medio	BAJO	BAJO	MEDIO
Nuevo	BAJO	BAJO	BAJO

VERAZ MEDIO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	MEDIO	MEDIO	ALTO
Medio	MEDIO	MEDIO	MEDIO
Nuevo	BAJO	MEDIO	MEDIO

VERAZ ALTO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	MEDIO	ALTO	ALTO
Medio	MEDIO	MEDIO	ALTO
Nuevo	MEDIO	MEDIO	MEDIO

Promedio de Inversiones



$$\begin{cases} \mu_{Inversiones-bajo}(85) = 0 \\ \mu_{Inversiones-medio}(85) = 0.8 \\ \mu_{Inversiones-alto}(85) = 0.1 \end{cases}$$

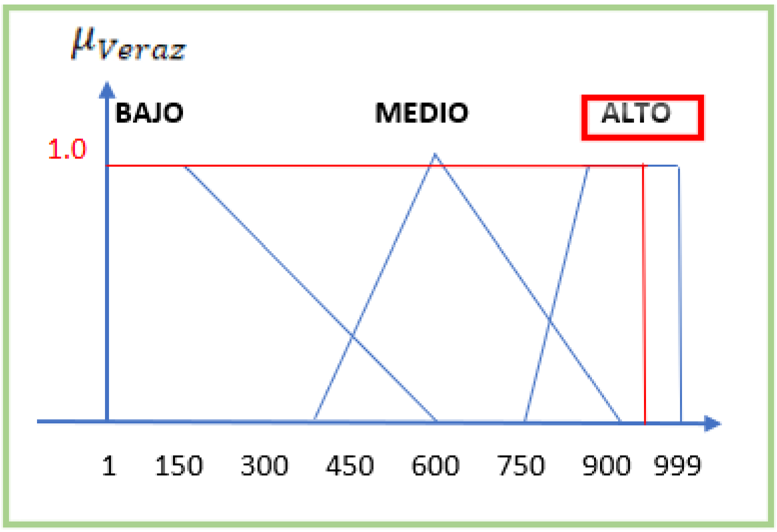
Solo se activan las reglas para “medio” y “alto”:

VERAZ BAJO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	BAJO	MEDIO	MEDIO
Medio	BAJO	BAJO	MEDIO
Nuevo	BAJO	BAJO	BAJO

VERAZ MEDIO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	MEDIO	MEDIO	ALTO
Medio	MEDIO	MEDIO	MEDIO
Nuevo	BAJO	MEDIO	MEDIO

VERAZ ALTO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	MEDIO	ALTO	ALTO
Medio	MEDIO	MEDIO	ALTO
Nuevo	MEDIO	MEDIO	MEDIO

Score Veraz



$$\begin{cases} \mu_{Veraz-bajo}(950) = 0 \\ \mu_{Veraz-medio}\ (950) = 0 \\ \mu_{Veraz-altio}(950) = 1.0 \end{cases}$$

Solo se activan las reglas para “alto”:

VERAZ BAJO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	BAJO	MEDIO	MEDIO
Medio	BAJO	BAJO	MEDIO
Nuevo	BAJO	BAJO	BAJO

VERAZ MEDIO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	MEDIO	MEDIO	ALTO
Medio	MEDIO	MEDIO	MEDIO
Nuevo	BAJO	MEDIO	MEDIO

VERAZ ALTO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	MEDIO	ALTO	ALTO
Medio	MEDIO	MEDIO	ALTO
Nuevo	MEDIO	MEDIO	MEDIO

Por lo tanto, teniendo en cuenta las 3 variables, resulta la siguiente grilla, donde se muestran las 4 reglas que se activan:

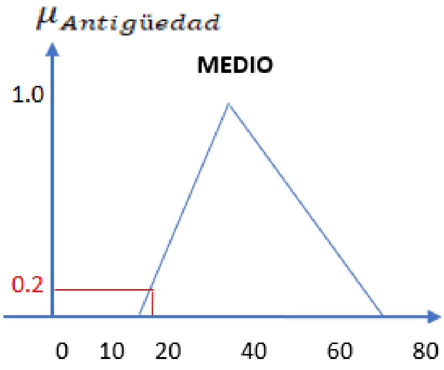
VERAZ BAJO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	BAJO	MEDIO	MEDIO
Medio	BAJO	BAJO	MEDIO
Nuevo	BAJO	BAJO	BAJO

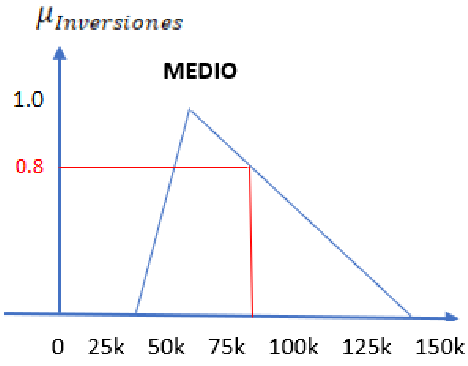
VERAZ MEDIO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	MEDIO	MEDIO	ALTO
Medio	MEDIO	MEDIO	MEDIO
Nuevo	BAJO	MEDIO	MEDIO

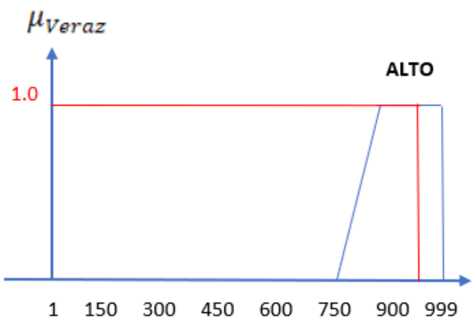
VERAZ ALTO	PROMEDIO INVERSIONES		
ANTIGÜEDAD	Bajo	Medio	Alto
Antiguo	MEDIO	ALTO	ALTO
Medio	MEDIO	MEDIO	ALTO
Nuevo	MEDIO	MEDIO	MEDIO

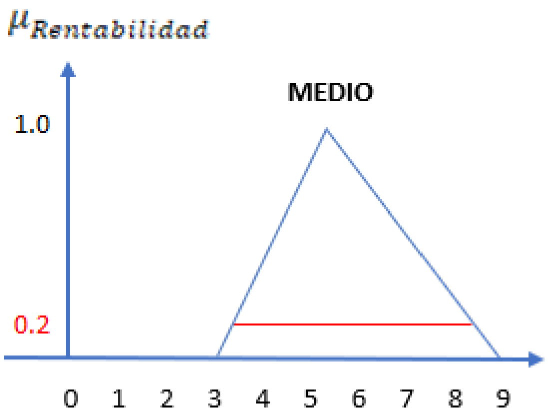
Aplicación de las reglas

$R^{(1)}$: SI el Score de Veraz del cliente es “alto”, su promedio de inversiones es “medio” y es un cliente “medio”, ENTONCES el índice de rentabilidad será “medio”.

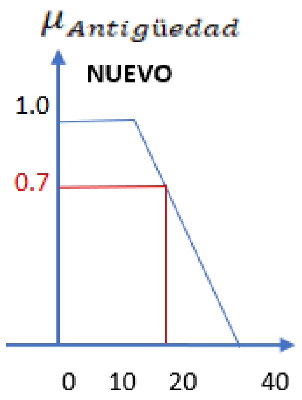


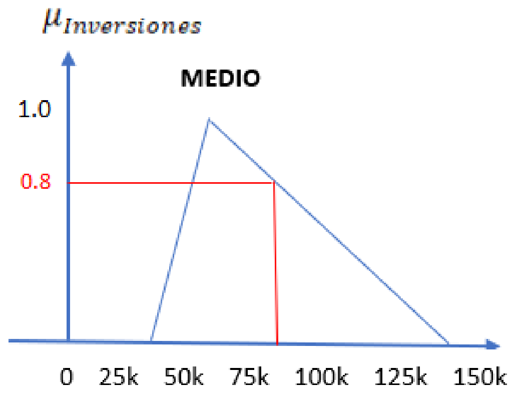


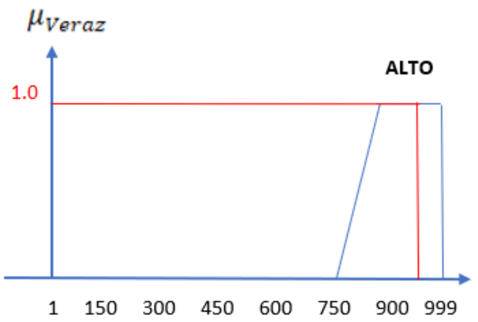




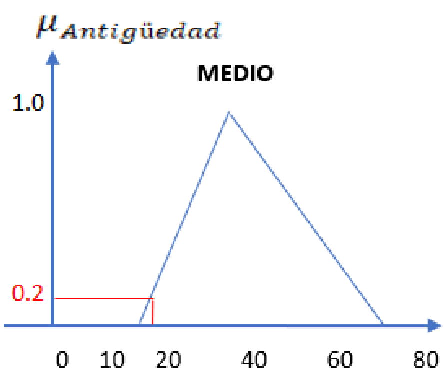
$R^{(2)}$: SI el Score de Veraz del cliente es “alto”, su promedio de inversiones es “medio” y es un cliente “nuevo”, ENTONCES el índice de rentabilidad será “medio”.

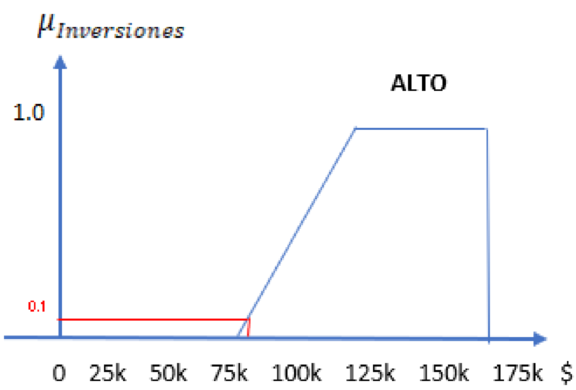


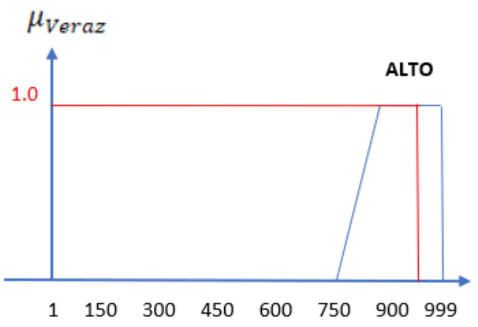


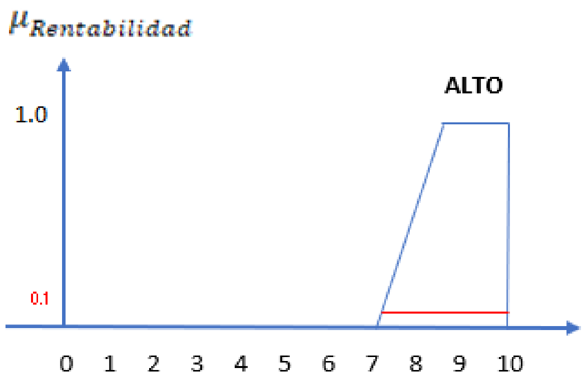


$R^{(3)}$: SI el Score de Veraz del cliente es “alto”, su promedio de inversiones es “alto” y es un cliente “medio”, ENTONCES el índice de rentabilidad será “alto”.

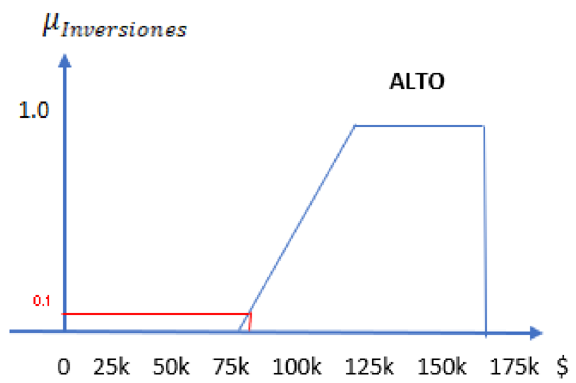


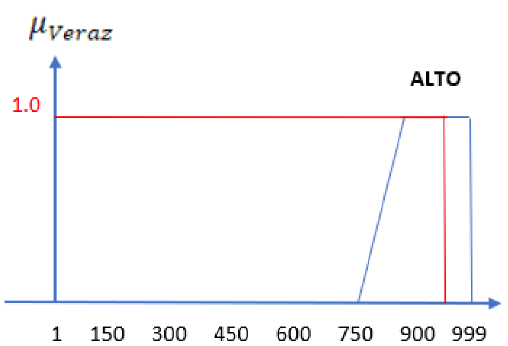


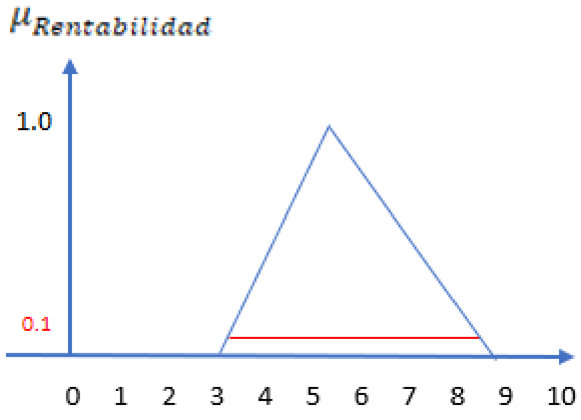




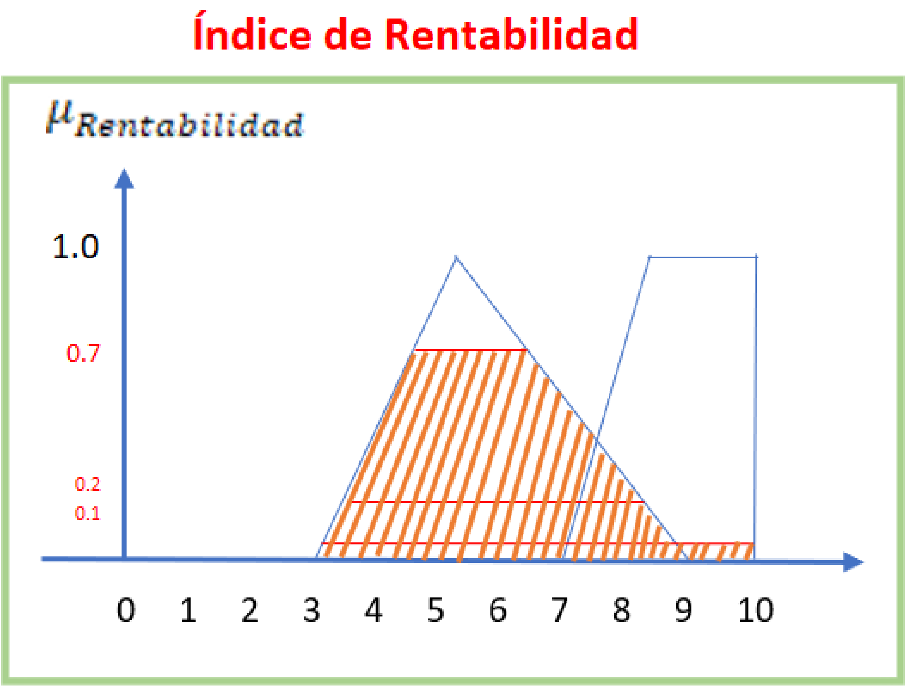
$R^{(4)}$: SI el Score de Veraz del cliente es “alto”, su promedio de inversiones es “alto” y es un cliente “nuevo”, ENTONCES el índice de rentabilidad será “medio”.







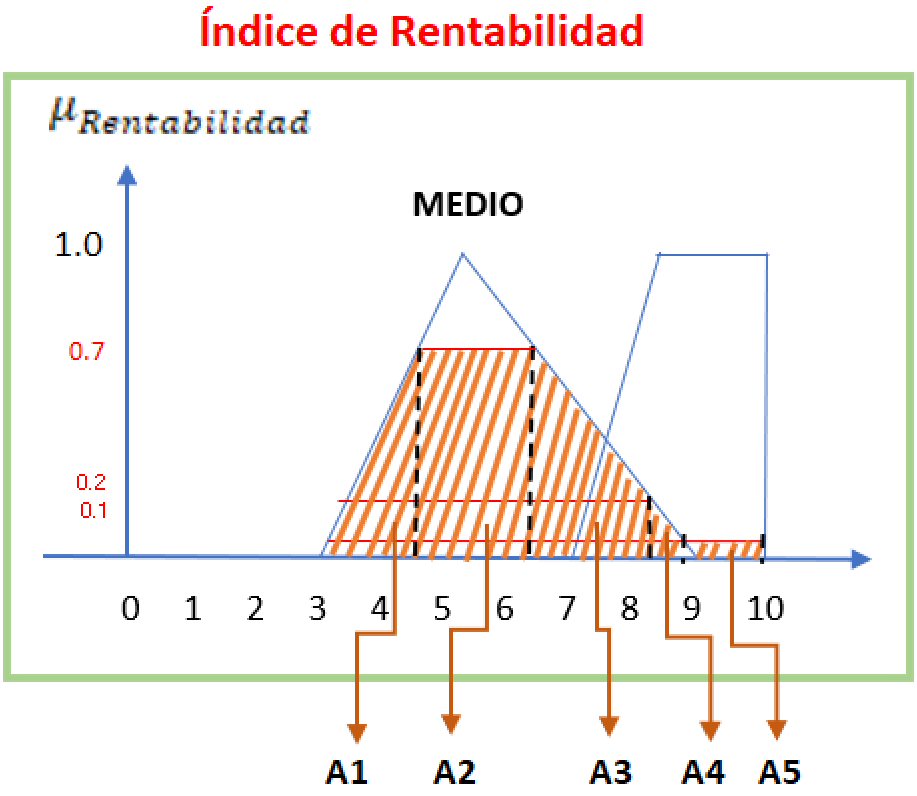
Unión de los valores de salida



Defuzzyficación

Se realiza la desdifusión con el método del centroide. El objetivo es obtener un valor numérico del índice de rentabilidad, dada la salida del sistema, mostrada en el gráfico anterior.

Para aplicar el método, se dividió en áreas, para poder luego aplicar el método del Centroide:



Áreas Parciales

$A1 = \frac{1{,}51\,.0{,}7}{2} = 0{,}5285$

$A2 = 1{,}77\,.\,0{,}7 = 1{,}239$

$A3 = 1{,}8.\left(\frac{0{,}7 + 0{,}2}{2}\right) = 0{,}81$

$A4 = 0{,}36.\left(\frac{0{,}2 + 0{,}1}{2}\right) = 0{,}054$

$A5 = 1{,}36\,.\,0{,}1 = 0{,}136$

Área Total

A= 2,7675

Centroides Parciales

$$C1 = \frac{\int_{3,2}^{4,71} \left(\frac{13}{28}x - \frac{52}{35}\right) x\ dx}{\int_{3,2}^{4,71} \left(\frac{13}{28}x - \frac{52}{35}\right)\ dx} = \frac{2,2266}{0,5293} = 4,2067$$

$$C2 = \frac{\int_{4,71}^{6,48} 0,7\ x\ \ dx}{\int_{4,71}^{6,48} 0,7\ \ dx} = \frac{6,9322}{1,239} = 5,5950$$

$$C3 = \frac{\int_{6,48}^{8,28} \left(-\frac{5}{18}x + \frac{5}{2}\right) x\ dx}{\int_{6,48}^{8,28} \left(-\frac{5}{18}x + \frac{5}{2}\right)\ dx} = \frac{5,8428}{0,81} = 7,2133$$

$$C4 = \frac{\int_{8,28}^{8,64} \left(-\frac{5}{18}x + \frac{5}{2}\right) x\ dx}{\int_{8,28}^{8,64} \left(-\frac{5}{18}x + \frac{5}{2}\right)\ dx} = \frac{0,4558}{0,054} = 8,4407$$

$$C5 = \frac{\int_{8,64}^{10} 0,1\ x\ \ dx}{\int_{8,64}^{10} 0,1\ \ dx} = \frac{1,2675}{0,136} = 9,3199$$

Cálculo del Centroide

$$C = \frac{1}{A}(C1.A1 + C2.A2 + C3.A3 + C4.A4 + C5.A5)$$

$$C = \frac{1}{2,7675}(4,2067 \,.\, 0,5285 + 5,5950 \,.\, 1,239 + 7,2133 \,.\, 0,81 + 8,4407 \,.\, 0,054 \\ + 9,3199 \,.\, 0,136)$$

$$C = \frac{1}{2,7675} \,.\, 16,7215 = 6,0421$$

Por lo tanto el índice de rentabilidad para nuestro cliente es 6, bastante rentable, por lo cual podremos ofrecerle uno de estos dos beneficios con el fin de retenerlo:

- Descuentos en Supermercados, Combustibles y Restaurantes con Tarjeta de Débito.
- Devolución por compras con Tarjeta de Crédito en cuotas.

5.4 APLICACIÓN EN R.

En esta sección se muestra la implementación y resolución del sistema difuso definido anteriormente, en lenguaje R. Se replicó el modelo con sus correspondientes funciones de pertenencia y se lo aplicó para resolver el ejemplo dado, llegando al mismo resultado.

A continuación se muestra el código usado. Obviamente, con esta implementación se puede evaluar cualquier caso de un cliente del Banco, para determinar las acciones a realizar para su retención.

```
library(sets)
```

```
# Se definen los universos
U1 <- seq(from=0, to=100, by=0.5)
U2 <- seq(from=0, to= 200, by= 0.5)
U3 <- seq(from=1, to= 100, by= 0.5)
U4 <- seq(from=0, to= 11, by= 0.5)

# Se definen los conjuntos difusos
variables <- set(
 Antigüedad = fuzzy_variable(
        nuevo = fuzzy_trapezoid_gset(corners = c(0,1,12,31),universe=U1),
        medio = fuzzy_triangular_gset(corners = c(14,33,70),universe=U1),
        antiguo= fuzzy_trapezoid_gset(corners = c(39,66,94,95),universe=U1)),
 Promedio_Inversiones = fuzzy_variable(
        bajo = fuzzy_trapezoid_gset(corners = c(0,1,34,70),universe=U2),
        medio = fuzzy_triangular_gset(corners = c(38,75,140),universe=U2),
        alto= fuzzy_trapezoid_gset(corners = c(90,130,174,175),universe=U2)),
 Score_Veraz = fuzzy_variable(
        bajo = fuzzy_trapezoid_gset(corners = c(1,2,15,60),universe=U3),
        medio = fuzzy_triangular_gset(corners = c(38,60,90),universe=U3),
        alto= fuzzy_trapezoid_gset(corners = c(75,83,98.5,99.5),universe=U3)),
 Índice_Rentabilidad = fuzzy_variable(
        bajo = fuzzy_trapezoid_gset(corners = c(0,1,1.5,5.5),universe=U4),
        medio = fuzzy_triangular_gset(corners = c(3.5,5.5,9),universe=U4),
```

```
            alto= fuzzy_trapezoid_gset(corners = c(7,9,10,11),universe=U4))

)
```

```
# Reglas difusas
rules <- set(
 fuzzy_rule(Antigüedad %is% nuevo && Promedio_Inversiones %is% bajo &&
        Score_Veraz %is% bajo, Índice_Rentabilidad %is% bajo),
  fuzzy_rule(Antigüedad %is% nuevo && Promedio_Inversiones %is% bajo &&
        Score_Veraz %is% medio, Índice_Rentabilidad %is% bajo),
 fuzzy_rule(Antigüedad %is% nuevo && Promedio_Inversiones %is% bajo &&
        Score_Veraz %is% alto, Índice_Rentabilidad %is% medio),
 fuzzy_rule(Antigüedad %is% nuevo && Promedio_Inversiones %is% medio &&
        Score_Veraz %is% bajo, Índice_Rentabilidad %is% bajo),
 fuzzy_rule(Antigüedad %is% nuevo && Promedio_Inversiones %is% medio &&
        Score_Veraz %is% medio, Índice_Rentabilidad %is% medio),
 fuzzy_rule(Antigüedad %is% nuevo && Promedio_Inversiones %is% medio &&
        Score_Veraz %is% alto, Índice_Rentabilidad %is% medio),
fuzzy_rule(Antigüedad %is% nuevo && Promedio_Inversiones %is% alto &&
        Score_Veraz %is% bajo, Índice_Rentabilidad %is% bajo),
fuzzy_rule(Antigüedad %is% nuevo && Promedio_Inversiones %is% alto &&
        Score_Veraz %is% medio, Índice_Rentabilidad %is% medio),
fuzzy_rule(Antigüedad %is% nuevo && Promedio_Inversiones %is% alto &&
        Score_Veraz %is% alto, Índice_Rentabilidad %is% medio),
 fuzzy_rule(Antigüedad %is% medio && Promedio_Inversiones %is% bajo &&
        Score_Veraz %is% bajo, Índice_Rentabilidad %is% bajo),
  fuzzy_rule(Antigüedad %is% medio && Promedio_Inversiones %is% bajo &&
        Score_Veraz %is% medio, Índice_Rentabilidad %is% medio),
 fuzzy_rule(Antigüedad %is% medio && Promedio_Inversiones %is% bajo &&
        Score_Veraz %is% alto, Índice_Rentabilidad %is% medio),
 fuzzy_rule(Antigüedad %is% medio && Promedio_Inversiones %is% medio &&
        Score_Veraz %is% bajo, Índice_Rentabilidad %is% bajo),
 fuzzy_rule(Antigüedad %is% medio && Promedio_Inversiones %is% medio &&
```

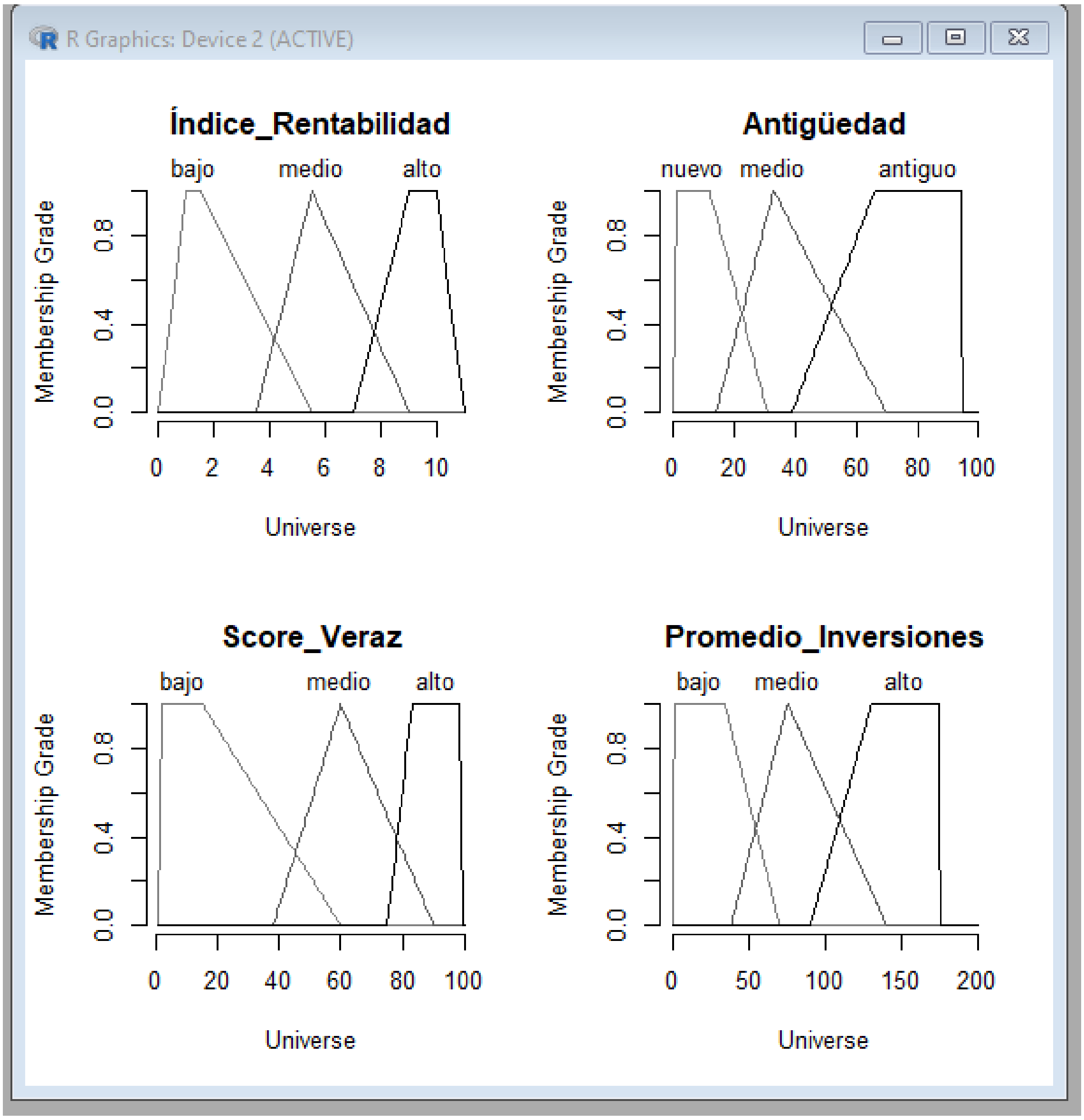
```
            Score_Veraz %is% medio, Índice_Rentabilidad %is% medio),
  fuzzy_rule(Antigüedad %is% medio && Promedio_Inversiones %is% medio &&
            Score_Veraz %is% alto, Índice_Rentabilidad %is% medio),
fuzzy_rule(Antigüedad %is% medio && Promedio_Inversiones %is% alto &&
            Score_Veraz %is% bajo, Índice_Rentabilidad %is% medio),
fuzzy_rule(Antigüedad %is% medio && Promedio_Inversiones %is% alto &&
            Score_Veraz %is% medio, Índice_Rentabilidad %is% medio),
fuzzy_rule(Antigüedad %is% medio && Promedio_Inversiones %is% alto &&
            Score_Veraz %is% alto, Índice_Rentabilidad %is% alto),
  fuzzy_rule(Antigüedad %is% antiguo && Promedio_Inversiones %is% bajo &&
            Score_Veraz %is% bajo, Índice_Rentabilidad %is% bajo),
   fuzzy_rule(Antigüedad %is% antiguo && Promedio_Inversiones %is% bajo &&
            Score_Veraz %is% medio, Índice_Rentabilidad %is% medio),
  fuzzy_rule(Antigüedad %is% antiguo && Promedio_Inversiones %is% bajo &&
            Score_Veraz %is% alto, Índice_Rentabilidad %is% medio),
  fuzzy_rule(Antigüedad %is% antiguo && Promedio_Inversiones %is% medio &&
            Score_Veraz %is% bajo, Índice_Rentabilidad %is% medio),
  fuzzy_rule(Antigüedad %is% antiguo && Promedio_Inversiones %is% medio &&
            Score_Veraz %is% medio, Índice_Rentabilidad %is% medio),
  fuzzy_rule(Antigüedad %is% antiguo && Promedio_Inversiones %is% medio &&
            Score_Veraz %is% alto, Índice_Rentabilidad %is% alto),
fuzzy_rule(Antigüedad %is% antiguo && Promedio_Inversiones %is% alto &&
            Score_Veraz %is% bajo, Índice_Rentabilidad %is% medio),
fuzzy_rule(Antigüedad %is% antiguo && Promedio_Inversiones %is% alto &&
            Score_Veraz %is% medio, Índice_Rentabilidad %is% alto),
fuzzy_rule(Antigüedad %is% antiguo && Promedio_Inversiones %is% alto &&
            Score_Veraz %is% alto, Índice_Rentabilidad %is% alto)
)
```

```
# Combinamos el sistema
```

```
model <- fuzzy_system(variables, rules)
print(model)
plot(model)
```

```
# Aplicamos el ejemplo
example.1 <- fuzzy_inference(model, list(Antigüedad = 15, Promedio_Inversiones = 85,
                        Score_Veraz = 95))
gset_defuzzify(example.1, "centroid")
```

El comando plot (model) grafica las funciones de pertenencia de todas las variables involucradas en el modelo. El gráfico resultante es el siguiente:



Ejemplo:

```
> # Aplicamos el ejemplo
> example.1 <- fuzzy_inference(model, list(Antigüedad = 15, Promedio_Inversiones = 85,
+                                          Score_Veraz = 95))
> gset_defuzzify(example.1, "centroid")
[1] 6.01482
```

En este caso hemos aplicado el método del Centroide. Pero bien podemos utilizar para nuestro sistema otros métodos de desdifusión incluidos en R, y obtendremos valores similares:

```
> gset_defuzzify(example.1,"meanofmax")
[1] 5.75
```

Mean of Maximum (MOM) representa un método de desdifusión donde se traza una línea a través del término donde el valor se cruza y se calcula el punto central entre las dos intersecciones en la misma meseta.

```
> gset_defuzzify(example.1,"smallestofmax")
[1] 5.5
```

Smallest of Maximum (SOM) Este método determina el valor más pequeño del dominio con el valor máximo de pertenencia.

```
> gset_defuzzify(example.1,"largestofmax")
[1] 6
```

Largest of Maximum (LOM) determina el valor más grande del dominio con el valor máximo de pertenencia.

A partir de estos resultados, se observa que si bien los métodos son distintos, se obtienen valores sin diferencias significativas entre sí, por lo tanto cualquiera de los estudiados es válido para ser aplicado en la defuzzyficación.
Es importante resaltar que se puede evaluar cualquier caso usando este código de R, ya que simplemente se deberán modificar los universos, conjuntos y reglas difusos de acuerdo al sistema que se quiere diseñar. Asimismo, si por algún motivo se decidiera agregar o quitar reglas (por ejemplo por nuevo conocimiento adquirido, nuevas regulaciones, actualización de umbrales, etc.), fácilmente se modifica el código creado.

CONCLUSIONES

En esta tesis se han estudiado los sistemas de lógica difusa (FLS), que son sistemas no lineales que mapean un vector de entrada numérico en una salida escalar. Se han proporcionado fórmulas matemáticas que describen este sistema, demostrando que se puede expresar como una combinación lineal de funciones difusas. También es único, en el sentido de que puede utilizar datos numéricos y conocimiento lingüístico.

La arquitectura de un FLS está determinada por una cuidadosa comprensión de conjuntos difusos y lógica difusa y es rico en posibilidades, es decir, no hay un FLS, hay muchos. Los usuarios de FLS, deben decidir el tipo de difusión, los parámetros de las funciones de pertenencia, composición (max-min, max-product), inferencia (mínimo, producto), y desdifusión (centroide en nuestro ejemplo).

Al construir el sistema difuso, nos desviamos de la habitual lógica proposicional de implicación, para llegar a las aplicaciones de ingeniería, donde la lógica difusa fue utilizada con éxito para controlar numerosos problemas.

Por último, se ha ilustrado un FLS en un ejemplo aplicado a la estrategia de retención de clientes de una entidad financiera bancaria. A cada cliente se le asigna un índice de rentabilidad entre 0 y 10, de actualización constante, donde 0 es un cliente no rentable y 10 es un cliente altamente rentable. Este índice permite, mediante una matriz, determinar qué beneficio se le puede ofrecer al cliente, con el objetivo de lograr retenerlo. Asimismo este FLS fue programado en lenguaje R.

BIBLIOGRAFÍA

Diciembre Sanahuja, Samuel. *Sistemas de Control con Lógica Difusa: Métodos de Mamdani y de Takagi-Sugeno-Kang (TSK).* Universitat Jaume, 2017.

Kaufmann, A. Introduction to the theory of Fuzzy Subsets Vol I. Academic Press, 1975.

Klir, George J. y Yuan, Bo. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic (Theory and Applications).* Prentice Hall PTR, 1995.

Mendel, Jerry M. *Fuzzy Logic Systems for Engineering: A Tutorial*. IEEE, 1995.

Pereda Sifuentes, Eliseo G. *Relaciones Binarias Difusas.* Biblioteca Digital. Dirección de Sistemas de Informática y Comunicación - UNT, 2013.

Ross, Timothy J. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. University of Mexico, 2004.

Sivanandam S.N., Sumathi S. y Deepa S.N. *Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB*. Springer, 2007.