ECUACIÓN DE GINZBURG LANDAU COMPLEJA CON UN TÉRMINO POTENCIAL EN ESPACIOS DE ZHIDKOV

Agustin Besteiro†

†Universidad Abierta Interamericana, Centro de Altos Estudios en Tecnología informática. Buenos Aires, Argentina, agustin.besteiro@uai.edu.ar .

Resumen: Consideramos la ecuación de Ginzburg Landau compleja con un término de tipo potencial acotado en la recta real. Demostramos la existencia local de soluciones para el problema de valores iniciales en espacios de Zhidkov, como subespacio de las funciones uniformemente continúas utilizando métodos de splitting número.

Palabras claves: *ecuaciones de Ginzburg Landau, ecuaciones diferenciales, metodos de Splitting*
2000 AMS Subjects Classification: 47J35; 35K55; 35K58;

1. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Ginzburg Landau compleja es una de las ecuaciones no lineales más estudiadas en la matemática y en la física. Describe de forma cualitativa y cuantitativa una gran cantidad de fenómenos como, por ejemplo, superconductividad, superfluidez, condensados de Bose-Einstein y cristales líquidos [2]. Nuestro objetivo es demostrar la existencia local de soluciones en un espacio muy particular como lo es el espacio de Zhidkov. Estos espacios fueron introducidos por P. Zhidkov [13] y consisten en funciones definidas en la recta real, que son acotadas y uniformemente continuas, con derivadas de orden k en L^2. La ventaja de utilizar estos espacios, es que permite analizar ciertas soluciones que en el infinito tienden a un valor especifico. Esto permite modelar los solitones oscuros (dark solitons), que son "sombras" de ondas viajeras, es decir soluciones que se escriben como $u(x,t) = u_v(x - vt)$. Por ejemplo, en [10] se encuentran soluciones específicas de tipo soliton oscuro para una ecuación de Ginzburg Landau compleja no lineal. Este tipo de soluciones son importantes en otro tipo de ecuaciones como, por ejemplo, las ecuaciones de Schrödinger [8, 11]. Consideramos el siguiente sistema unidimensional:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= (\alpha + i\beta)\partial_{xx} u + \gamma u + V(x)u, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

donde $u = u(x,t)$ es una función compleja con $x \in \mathbb{R}, t > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma \geq 0$ y $V(x)$ una función continua y acotada. Una gran cantidad de trabajo se ha hecho para demostrar la existencia local de soluciones en otros espacios, y con distintas no linealidades [12]. En nuestro caso, demostraremos la existencia local de soluciones en espacios de Zhidkov, utilizando métodos de Splitting temporales, para ecuaciones de evolución semilineales. Estos métodos ya han sido utilizados anteriormente para obtener resultados de buen planteo local en otras ecuaciones y espacios, como en ecuaciones de reacción difusión [3] y para soluciones en espacios de Peregrine [4]. Estos métodos permiten particionar la variable temporal, para poder avanzar por separado con distintas partes de la ecuación. Los métodos de Splitting temporales fueron introducidos principalmente para obtener aproximaciones de soluciones a diversas ecuaciones, a través de algoritmos numéricos, como podemos apreciar en artículos específicos de ecuaciones no lineales de evolución [9]. De esa forma, de acuerdo con que tan "fina" es la partición utilizada computacionalmente, uno obtendrá una mejor aproximación a la solución. Estos métodos ya han sido implementados en Clusters del departamento de computación de alta performance de la CNEA demostrando una importante aplicabilidad en distintos problemas [1]. La novedad introducida recientemente, es la de aplicar estos métodos para obtener resultados puramente teóricos, como ya se ha hecho para la ecuación de Ginzburg Landau en espacios de Zhidkov con distintas no linealidades [5].

2. NOTACIÓN Y RESULTADOS PRELIMINARES

En esta sección introducimos algunas definiciones y resultados preliminares.

Definición 1 *Definimos $C_u(\mathbb{R})$ como el espacio de las funciones uniformemente continuas en una dimensión real.*

Definición 2 *Definimos los espacios de Zhidkov para* $k > \frac{d}{2}$, *como*

$$X^k(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C_u(\mathbb{R}^d): \partial_j u \in L^2(\mathbb{R}^d), 1 \leq |j| \leq k\}$$

Es decir, las funciones uniformemente continuas y acotadas, con derivadas hasta orden k en el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$. La norma asociada es:

$$\|u\|_{X^k} = \|u\|_{L^\infty} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq k} \|\partial_\alpha u\|_{L^2}.$$

En este trabajo se considera el caso $k = 1$ y $d = 1$.

Observación 3 *Los espacios de Zhidkov son cerrados con respecto a la norma definida [11].*

Definición 4 *Definimos como* $U(t)$ *al semigrupo que resuelve la siguiente ecuación diferencial lineal en una dimensión:*

$$\partial_t u = (\alpha + i\,\beta)\partial_{xx} u + \gamma\, u.$$

Si adicionalmente, tenemos la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$ entonces la solución del problema de valores iniciales de la ecuación lineal se puede escribir en términos de la convolución entre el núcleo y la condición inicial:

$$U(t)u_0\,(x) = G_t(x) * u_0(x) = \left(\big(4\pi\, t(\alpha + i\,\beta)\big)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{[4t(\alpha+i\beta)]}+\gamma\, t}\right) * u_0\,(x).$$

El núcleo $G_t\,(x)$ satisface:

$$|G_t(x)| = \big(4\pi\, t(\alpha^2 + \beta^2)\big)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{[4t(\alpha^2+\beta^2)]}+\gamma\, t},$$

con lo cual se puede demostrar que $G_t(x) \in L^1(\mathbb{R})$, es decir se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G_t(x)|\, dx < \infty.$$

Proposición 5 *La familia* $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores definidos como* $U(t)u_0 = G_t * u_0$ *es un semigrupo fuertemente continuo.*

Prueba. Ver proposición 2.2 en [3]. □

Lema 6 *(Desigualdad de Young): Si* $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $v \in L^q\,(\mathbb{R}^d)$ *y si además tenemos que:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

Con $1 \leq p, q \leq r \leq \infty$. *Entonces*

$$\|u * v\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}\, \|v\|_{L^q}.$$

Prueba. Ver teorema 3.9.4 en [6]. □

En el siguiente Lema, demostraremos que si la condición inicial, está en el espacio de Zhidkov unidimensional, y de orden $k = 1$, entonces la evolución de la ecuación lineal mantiene la solución en el mismo espacio.

Observación 7 *En general, si denotamos* $u(t,x) \in C_u(\mathbb{R})$, *nos estaremos refiriendo a* $u(t,x) \in C\left(\big[0, T^*\,(u_0)\big), C_u(\mathbb{R})\right)$, *donde* $T^*(u_0)$ *es el tiempo maximal de existencia de solución con condición inicial* u_0, *que será definido rigurosamente más adelante.*

Lema 8 *Si* $u_0 \in X^1(\mathbb{R})$ *entonces* $U(t)u_0 \in X^1(\mathbb{R})$.

Prueba. Como sabemos que $u_0 \in X^1(\mathbb{R})$ entonces en particular $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Utilizaremos la desigualdad de Young para convoluciones:

$$\|U(t)u_0\|_{L^\infty} = \|G_t * u_0\|_{L^\infty} \leq \|G_t\|_{L^1}\, \|u_0\|_{L^\infty}.$$

Como además, $G_t(x) \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene que $\|G_t\|_{L^1}\, \|u_0\|_{L^\infty} < \infty$ y $U(t)u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Por otro lado, como $u_0 \in X^1(\mathbb{R})$ entonces $\partial_x\, u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces, usando otra vez, la desigualdad de Young para convoluciones y propiedades de la convolución con respecto a las derivadas, tenemos:

$$\|\partial_x\,(U(t)u_0)\|_{L^2} = \|\partial_x(G_t * u_0)\|_{L^2} = \|G_t * \partial_x\,u_0\,\|_{L^2} \leq \|G_t\|_{L^1}\,\|\partial_x\,u_0\|_{L^2} < \infty,$$

por lo tanto, $\partial_x\,(U(t)u_0) \in L^2(\mathbb{R})$ y como $U(t)u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, tenemos que $U(t)u_0 \in X^1(\mathbb{R})$. □
Los siguientes resultados son bien conocidos y están detallados en la literatura especializada en el tema [7]:
Si F es una función localmente Lipschitz, entonces para cada $z_0 \in C_u(\mathbb{R})$, existe una solución única de la ecuación,

$$\begin{aligned} &\partial_t z = F(z),\\ &z(0) = z_0, \end{aligned} \qquad (2)$$

definida en el intervalo $[0, T^*(z_0))$. La solución de la ecuación (2) es también solución de la ecuación integral:

$$z(t) = z_0 + \int_0^t F\big(z(t'\,)\big)dt'. \qquad (3)$$

Además, tenemos una de las siguientes alternativas:

$$\begin{aligned} &T^*(z_0) = \infty,\\ &T^*\,(z_0) < \infty\; y\; |z(t)| \to \infty\; cuando\; t \to T^*(z_0). \end{aligned}$$

Definimos como $N(t,.)\colon C_u(\mathbb{R}) \to C_u(\mathbb{R})$, al flujo generado por la ecuación (2), esto es, para cualquier $x \in \mathbb{R}, N(t, u_0)(x)$ es la solución del problema (2) con dato inicial $z_0 = u_0\,(x)$. Por lo tanto, si $u(t) = N(t, u_0)$ tenemos:

$$u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t F(u(x,t'))dt'.$$

Usaremos un resultado sobre la existencia de soluciones en el espacio de las funciones uniformemente continuas:
Teorema 9 *Existe una función* $T^*\colon C_u(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ *tal que para* $u_0 \in C_u(\mathbb{R})$, *existe un único* $u \in C([0, T^*(u_0)), C_u(\mathbb{R}))$ *solución del problema (1) con* $u(0) = u_0$. *Mas aún, se tiene una de las siguientes alternativas:*

$$\begin{aligned} &T^*(u_0) = \infty,\\ &T^*\,(u_0) < \infty\;\; y \lim_{t \to T^*(u_0)} sup_{x\in\mathbb{R}}\quad |u(t,x)| = \infty\,. \end{aligned}$$

Prueba. Ver teorema 4.3.4 de [7].

□

3. Ecuación potencial

En esta sección, analizaremos el problema,

$$\begin{aligned} &\partial_t z = V(x)z,\\ &z(0) = z_0, \end{aligned} \qquad (4)$$

que es el sistema (2), con $F(z) = V(x)z$. Al igual que lo hicimos en el Lema 8, con la ecuación lineal, podemos demostrar para el problema (4) que si la condición inicial está en el espacio $X^1(\mathbb{R})$, entonces la evolución de la ecuación no lineal también estará en el espacio $X^1(\mathbb{R})$.
Lema 10 *Si* $u_0\,(x) = z_0 \in X^1(\mathbb{R}), |V(x)| < M\; y\; \partial_x\,V(x) \in L^2(\mathbb{R})$ *entonces la solución del problema (4),* $z(t) \in X^1(\mathbb{R})$ *para* $t \in (0, T^*(z_0))$.
Prueba. La solución del problema (4) es $z(t) = z_0 e^{V(x)t}$. Como $z_0 \in X^1(\mathbb{R})$, en particular $z_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Como $V(x)$ es acotado, entonces $z(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Por otro lado, si derivamos con respecto a x tenemos que $\partial_x z = \partial_x\,(z_0)e^{V(x)t} + \partial_x\big(V(x)\big)z_0\,e^{V(x)t}$. Como sabemos que $\partial_x(z_0) \in L^2(\mathbb{R})$ y que $\partial_x\,V(x) \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\partial_x\,(z_0)e^{V(x)t} \in L^2(\mathbb{R})$ y $\partial_x\,\big(V(x)\big)z_0\,e^{V(x)t} \in L^2(\mathbb{R})$, ya que $z_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $e^{V(x)t} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Por lo tanto, tenemos finalmente que $\partial_x\,z \in L^2(\mathbb{R})$ y $z(t) \in X^1(\mathbb{R})$.

□

4. Método de Splitting

En esta sección, utilizaremos el método de Splitting desarrollado en [9]. Esto nos permite unir los dos resultados importantes anteriores, el Lema 8 y el Lema 10, para el problema principal (1).

Teorema 11 *Sea* $u_0 \in X^1(\mathbb{R})$, *entonces la solución del problema (1)* $u(t) \in X^1(\mathbb{R})$ *para* $t \in (0, T^*(u_0))$.
Prueba. Para $t \in [0, T^*(u_0))$, sea $n \in \mathbb{N}$, $h = t/n$ y $\{W_{h,l}\}_{0 \le l \le n}, \{V_{h,l}\}_{1 \le l \le n}$ las sucesiones dadas por:

$$
\begin{aligned}
W_{h,0} &= u_0,\\
V_{h,l+1} &= U(h)W_{h,l},\\
W_{h,l+1} &= N(h, V_{h,l+1}), \quad l = 0, \dots, n-1.
\end{aligned}
$$

Estas sucesiones recorren un intervalo temporal de forma intercalada. La sucesión $V_{h,l}$ es resultado de avanzar con la ecuación lineal y la sucesión $W_{h,l}$ evoluciona con la parte no lineal. La sucesión $W_{h,l}$ es la que termina el ciclo, por lo tanto, lo que vamos a demostrar es que $W_{h,l} \in X^1(\mathbb{R})$ para $l = 0, \dots, n$ usando inducción. Para el caso $l = 0$ ya teníamos por como definimos la sucesión que $W_{h,0} = u_0 \in X^1(\mathbb{R})$. Para el paso inductivo, suponemos que $W_{h,l-1} \in X^1(\mathbb{R})$. Por el Lema 8, tenemos que $V_{h,l} = U(h)W_{h,l-1} \in X^1(\mathbb{R})$. Para el paso siguiente tenemos por el Lema 10, $W_{h,l} = N(h, V_{h,l}) \in X^1(\mathbb{R})$. Esto significa que, completado el ciclo, la solución que avanza de forma particionada está en el mismo espacio de Zhidkov. Sin embargo, nuestro objetivo es demostrar que la solución de la ecuación (1) está en el espacio $X^1(\mathbb{R})$. La convergencia de la solución particionada hacia la solución de la ecuación (1) está garantizada por el Teorema 3.9 de [9], lo cual nos dice que $W_{h,n} \to u(t)$ cuando $n \to \infty$, es decir cuando las particiones temporales se hacen cada vez más pequeñas. Finalmente, como $X^1(\mathbb{R})$ es cerrado, tenemos asegurada no solo la convergencia, sino que además la solución $u(t) \in X^1(\mathbb{R})$. □

Observación 12 *Es importante notar, que hemos utilizado el Splitting temporal para obtener un resultado teórico como lo es, el buen planteo de la ecuación de Ginzburg-Landau compleja con un término potencial, en espacios de Zhidkov. Es posible adaptar este mismo método para obtener una solución aproximada, mediante el uso computacional, haciendo particiones finas del intervalo temporal [1]. En principio se podría extender el resultado del Teorema 11, a casos con orden* $k > 1$ *pero se requiere modificar y garantizar una forma generalizada de acotar para cada* k *en el Lema 10.*

AGRADECIMIENTOS

El autor desea agradecer a la Universidad Abierta Interamericana y al CONICET por el apoyo para el desarrollo de este trabajo. También desea agradecer los comentarios y sugerencias de los revisores.

REFERENCIAS

[1] ALVAREZ, A., RIAL, D.F., *Affine Combination of Splitting Type Integrators, Implemented with Parallel Computing Methods*, International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering, Vol. 9, No. 2: pp. 150-153, 2016.

[2] ARANSON, I. S., KRAMER, L., *The world of the complex Ginzburg-Landau equation*, Reviews of Modern Physics, Vol. 74, No.1: pp. 99-143, 2002.

[3] BESTEIRO, A.T., RIAL, D.F., *Global existence for vector valued fractional reaction-diffusion equations*, arXiv preprint arXiv:1805.09985, 2018.

[4] BESTEIRO, A.T., RIAL, D.F., *Existence of Peregrine type solutions in fractional reaction–diffusion equations*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Vol. 2019, No. 9: pp. 1-9, 2019.

[5] BESTEIRO, A.T., *Polynomial complex Ginzburg-Landau equations in Zhidkov spaces* i Matematychni Studii, Vol. 52, No.1: pp. 55-62, 2019.

[6] BOGACHEV, B. I., *Measure Theory* Springer Science & Business Media, 2006.

[7] CAZENAVE, T., HARAUX, A., *An Introduction to Semilinear Evolution Equations* Oxford Lecture Ser. Math. Appl., Clarendon Press, Rev ed. Edition, 1999.

[8] CAZENAVE, T., HARAUX, A., *Semilinear Schrödinger Equations* Courant Lecutre Notes, vol. 10, 2003.

[9] DE LEO, M., RIAL, D.F., SÁNCHEZ DE LA VEGA, C., *High-order time-splitting methods for irreversible equations,* IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 36, No.4: pp.1842-1866, 2016.

[10] EFREMIDIS, N., HIZANIDIS K., NISTAZAKIS H. E., FRANTZESKAKIS D. J., MALOMED B. A., *Stabilization of dark solitons in the cubic Ginzburg-Landau equation.* Physical Review E, Vol.63, No.5: pp. 7410-7414, 2000.

[11] GALLO, C., *Schrödinger group on Zhidkov spaces*. Adv. Differential Equations, Vol. 9, No.5-6: pp. 509-538, 2004.

[12] GINIBRE, J., VELO, G., *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation. I. Compactness methods*. Physica D, Vol. 95, No.3-4: pp. 191—228, 1996.

[13] ZHIDKOV, P., *The Cauchy problem for a nonlinear Schrödinger equation*. Joint Institute for Nuclear Research, Vol.19, No. 11, 1987.