UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA

Facultad de Tecnología Informática

Carrera: Licenciatura en Matemática

“La Hipótesis de Riemann y el número cuatro como único extraordinario”

Por

Dario Alejandro Falasca

Director de Tesis: Dr. Agustín Tomás Besteiro

Tesis Presentada para optar por el título de licenciado en matemática

-Año 2022-

Agradecimientos

A mi mujer Eliana, por motivarme y apoyarme en cada momento.

A Agustin B., este trabajo no hubiese sido posible sin su incondicional contribución.

A los docentes de la UAI, por formarme como matemático.

A mis compañeros de la UAI

A Geoffrey (Jeff) Caveney, porque siendo uno de los 3 autores del artículo en el que se basa la tesis, tuvo la humildad de responder nuestras dudas.

Resumen. El objetivo de este trabajo es analizar un artículo publicado por G. Caveney, J.L. Nicolas y J. Sondow en el año 2011 relacionando la validez de la Hipótesis de Riemann con los números extraordinarios. El principal resultado afirma que la Hipótesis de Riemann es verdadera, si y solo si, 4 es el único número extraordinario.

Palabras clave. Hipótesis de Riemann, Superabundantes, Desigualdad de Robin, Suma de Divisores, Abundancia, Primos.

“Si despertara después de haber dormido durante mil años, mi primera pregunta sería: ¿Se ha probado la hipótesis de Riemann?”. David Hilbert

Índice

1 – Introducción

En este trabajo, estudiamos un artículo titulado *"Robin's Theorem, Primes, and a New Elementary Reformulation of the Riemann Hypothesis"* escrito por Geoffrey Caveney, Jean-Louis Nicolas y Jonathan Sondow (Caveney, Nicolas, Sondow, 2011). En este artículo, los autores encuentran una nueva equivalencia para la Hipótesis de Riemann. La hipótesis de Riemann fue formulada originalmente por Bernhard Riemann (Riemann, 1859) como un problema de teoría de números en el contexto del análisis complejo y desde entonces se han encontrado varias equivalencias, en distintas ramas de la matemática. Un registro de ellas se puede encontrar en los dos tomos del libro de Kevin Broughan, específicamente en el primer tomo, se encuentran las equivalencias aritméticas (Broughan, 2017). Varias de estas equivalencias son consecuencia de un resultado de Guy Robin, al que llamaremos como la desigualdad de Robin (Robin, 1984), que establece que la hipótesis de Riemann es verdadera, si y solo si, la función de suma de los divisores esta acotada por una función bien concreta. Si $\sigma(n)$ es la función suma de divisores entonces la hipótesis de Riemann es equivalente a demostrar que

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log(\log(n))$$

Varias otras equivalencias se desprenden de esta misma, incluida la que es principal en el artículo a analizar en esta tesis.

El artículo en cuestión define $G(n)$ como $G(n) = \sigma(n)/(n \log\log(n))$. Según el artículo, la Hipótesis de Riemann es cierta si y solo si 4 es el único número extraordinario. Un número entero positivo N es extraordinario si cumple con las siguientes condiciones:

1. N es un número compuesto.
2. $G(n) \geq G(n/p)$ para todos los factores primos p de n.
3. $G(n) \geq G(an)$ para todos los múltiplos an de n.

La demostración del artículo utiliza la desigualdad de Robin y un resultado asintótico demostrado por Thomas Grönwall (Grönwall, 1913) sobre $G(n)$. También se incluye un corolario que establece que, si existe algún contraejemplo a la desigualdad de Robin, entonces el máximo $M = max\{G(n) : n > 5040\}$ existe y el menor número $n > 5040$ con $G(n) = M$ es extraordinario.

En este trabajo, analizamos en detalle la demostración del artículo y examinamos sus resultados. Discutimos la importancia de este enfoque en la comprensión de la Hipótesis de Riemann y su relación con otras teorías matemáticas.

La tesis está organizada de la siguiente manera, en el segundo capítulo veremos los resultados preliminares, definiciones y notaciones necesarias para el desarrollo del tema.

En el tercer capítulo, exhibiremos los principales resultados asociados con la hipótesis de Riemann, la desigualdad de Robin y sus equivalencias. En el cuarto capitulo demostraremos los teoremas desarrollados por Alaoglu y Erdös (Alaoglu, Erdös, 1944) de caracterización de los números superabundantes, números necesarios para el análisis de la función $G(n)$. En el quinto y último capítulo desarrollamos los principales resultados del artículo principal para esta tesis, obteniendo la equivalencia mencionada.

2 - Definiciones Previas

En este capítulo, se presentarán las definiciones, proposiciones y teoremas básicos necesarios para poner en contexto el tema principal sobre los números extraordinarios. La notación que se utilizará en toda la tesis se presentará en detalle, con ejemplos para ilustrar su uso en situaciones concretas.

Además, se discutirán teoremas básicos sobre la función suma de divisores y se explorará la noción de abundancia de un número. La definición de números superabundantes también se abordará en este capítulo, junto con algunos teoremas relacionados con su caracterización.

Finalmente, se presentará la definición de límite superior y su importancia en el contexto de la tesis. Este concepto será utilizado en el teorema de Thomas Grönwall (Grönwall, 1913) que se discutirá en capítulos posteriores.

Iniciamos con el Teorema Fundamental de la Aritmética, como fundamento principal para la descripción de los divisores de un número, a través de la factorización en números primos.

Teorema 2.1. (Teorema Fundamental de la Aritmética)

Todo número entero positivo $n > 1$ es un número primo o bien puede ser representado unívocamente como producto de potencias de números primos:

$$n = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \dots\, p_j^{k_j} = \prod_{i=1}^{j} p_i^{k_i}$$

donde $p_1 < p_2 < \cdots < p_j$ son primos y k_i son enteros positivos.

Esta forma de expresión, se llama representación canónica de n.

Ejemplo: $5040 = 2^4\ 3^2\ 5\ 7$

Demostración. Para esta demostración se asumen los siguientes resultados:

- Todo entero mayor a 1 tiene por lo menos un divisor primo, es decir o bien es un número primo o un compuesto.
- *Lema de Euclides.* Si un primo $p|ab$, para enteros a, b, entonces $p|a$ o $p|b$.

Existencia. Supongamos que la proposición es falsa. Sea m el número entero más chico que no puede ser expresado como producto de números primos.

Como un número primo es producto de primos, m no puede ser primo en sí mismo.

Por lo tanto: $\exists\ r, s \in\ \mathbb{Z}: 1 < r < m, 1 < s < m : m = rs$

Como m es nuestro menor contraejemplo, tanto r como s pueden ser expresados como producto de primos.
Sea $r = p_1 p_2 \dots p_k$ y $s = q_1 q_2 \dots q_l$, donde $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l$ son primos (admitiendo repetidos).
Tenemos que $m = rs = p_1 p_2 \dots p_k q_1 q_2 \dots q_l$, es producto de primos.

Por lo tanto, no existe el contraejemplo.

Unicidad. Supongamos que un numero n puede ser expresado como producto de primos de dos maneras distintas: $n = p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_l$ (admitiendo repetidos).

Queremos demostrar que estas dos representaciones son las mismas a excepción de su orden. Dado que estos dos productos son iguales a n, cualquier primo de un producto es divisor del otro. Es decir, como todo número tiene un divisor primo, entonces $p|n$. En nuestro caso como $n = p_1 p_2 \dots p_k$ podemos tomar cualquier primo p_i, con $1 \leq i \leq k$, y tenemos que $p_i|n$. Por lo tanto, $p_i|q_1 q_2 \dots q_l = n$.

Por lema de Euclides existe $1 \leq j \leq l$ tal que $p_i | q_j$. Cómo q_j es primo, tenemos $1|q_j$ y $q_j|q_j$, pero además $p_i|q_j$ y dado que p_i es primo entonces $p_i = q_j$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p_i = p_1$ y $q_j = q_1$, por lo tanto, tenemos $p_2 \dots p_k = q_2 \dots q_l$ cancelando p_1 y q_1. Usando el mismo razonamiento tenemos que $p_2 = q_2$. Podemos repetir el proceso hasta cancelar todos los primos en común.

Queremos demostrar que $k = l$.

Veamos el caso donde $k < l$. Por lo descripto anteriormente tenemos que $1 = q_{k+1} \dots q_l$ lo cual es absurdo ya que $q_{k+1} \dots q_l$ son primos.

Para el caso donde $k > l$, de la misma forma obtenemos $p_{l+1} \dots p_k = 1$ lo cual es absurdo ya que $p_{l+1} \dots p_k$ son primos.

Por lo tanto $k = l$ y $p_i = q_i$ para todo $1 \leq i \leq k$.

■

Proposición 2.2. Sean $n = p_1 p_2 \dots p_r$ primos no necesariamente todos distintos y p_{r+1} número primo tal que $p_{r+1} \neq p_i, 1 \leq i \leq r$. Entonces $\left(n, p_{r+1}^{k_{r+1}}\right) = 1$ donde (a, b) es el máximo común divisor.

Demostración. Los divisores de n son $1, p_1, p_2, \dots, p_r$ y todas sus combinaciones y los divisores de $p_{r+1}^{k_{r+1}}$ son $1, p_{r+1}, p_{r+1}^2, \dots, p_{r+1}^{k_{r+1}}$. Como $p_{r+1} \neq p_i$, $1 \leq i \leq r$ entonces $p_{r+1} \nmid n$. Por lo tanto $p_{r+1}^{k_{r+1}} \nmid n$.

■

Definición 2.3. Definimos la función contadora de divisores $d(n)$ como:

$$d(n) = \sum_{d|n} 1$$

Ejemplos:

$d(1) = 1$	$d(p) = 2$	$d(8) = 4$	$d(12) = 6$	$d(16) = 5$
$d(2) = 2$	$d(4) = 3$	$d(9) = 3$	$d(14) = 4$	$d(18) = 6$
$d(3) = 2$	$d(6) = 4$	$d(10) = 4$	$d(15) = 4$	$d(24) = 8$

Donde p es un número primo.

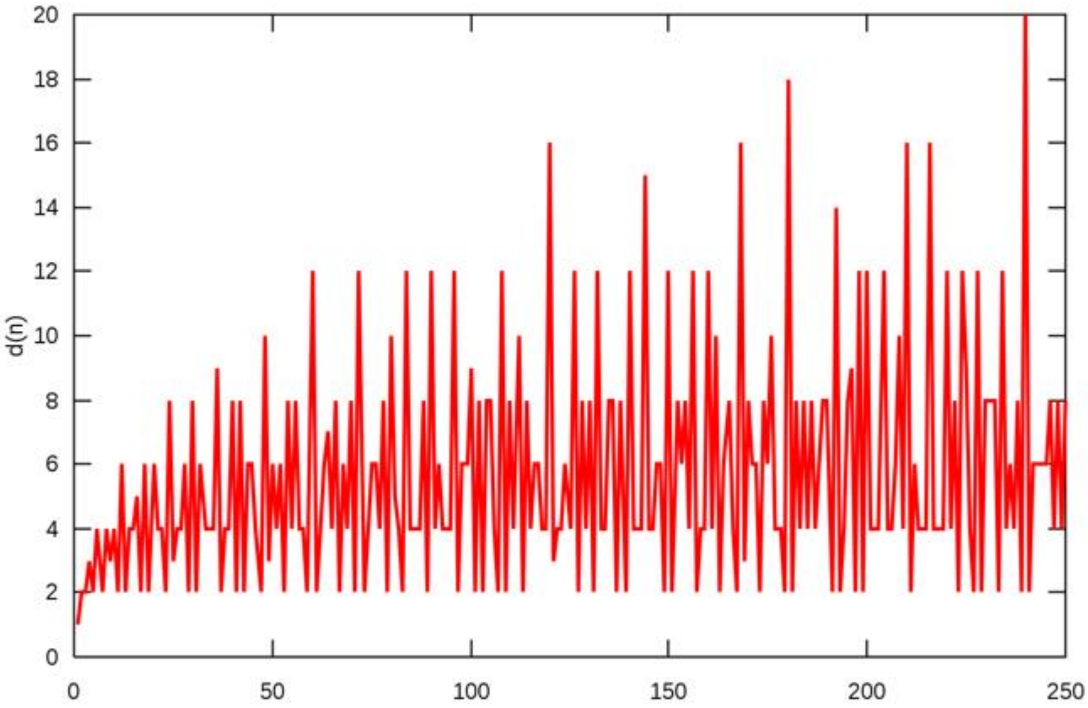


Gráfico del a función contadora de divisores $d(n)$

La función $d(n)$ nos muestra que en general no se puede predecir la cantidad de divisores que tiene un número natural cualquiera. La cantidad de divisores varía con extrema irregularidad a medida que n tiende a infinito. Por esto, es conveniente intentar caracterizar aquellos números con más divisores.

Definición 2.4. Definimos los números altamente compuestos como aquellos que tienen más divisores que todos sus anteriores.

Ejemplos: $2,4,6,12,24,36,48,60,120,180,240,360,720,840,1260,1680,2520,5040$, ...

Por el teorema fundamental de la aritmética todo natural se escribe como $n = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \ldots\, p_j^{k_j}$ donde $p_1, \ldots\, , p_j$ son primos y $k_1, \ldots\, , k_j$ son naturales.

Los siguientes resultados fueron demostrados por S. Ramanujan (Ramanujan, et al., 1997). Para cada número altamente compuesto se debe tener todos los primos consecutivos. Además, la sucesión de exponentes debe ser decreciente, es decir,

$$k_1 \geq \cdots \geq k_j$$

Ejemplo:

$120 = 2^3 3\ 5$

A excepción de 4 y 36, todos los números altamente compuestos tienen $k_j = 1$.

Nuestro interés no estará centrado en la cantidad de divisores de un número, sino la suma de divisores de un número, aunque comparten ciertas características.

Definición 2.5. Definimos la función suma de divisores $\sigma(n)$ cómo:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

Ejemplos.

$\sigma(1) = 1$	$\sigma(6) = 12$	$\sigma(14) = 24$
$\sigma(2) = 3$	$\sigma(8) = 15$	$\sigma(15) = 24$
$\sigma(3) = 4$	$\sigma(9) = 13$	$\sigma(16) = 31$
$\sigma(p) = p + 1$	$\sigma(10) = 18$	$\sigma(18) = 39$
$\sigma(4) = 7$	$\sigma(12) = 28$	$\sigma(24) = 60$

Para un número primo p, notar que $\sigma(p) = p + 1$.

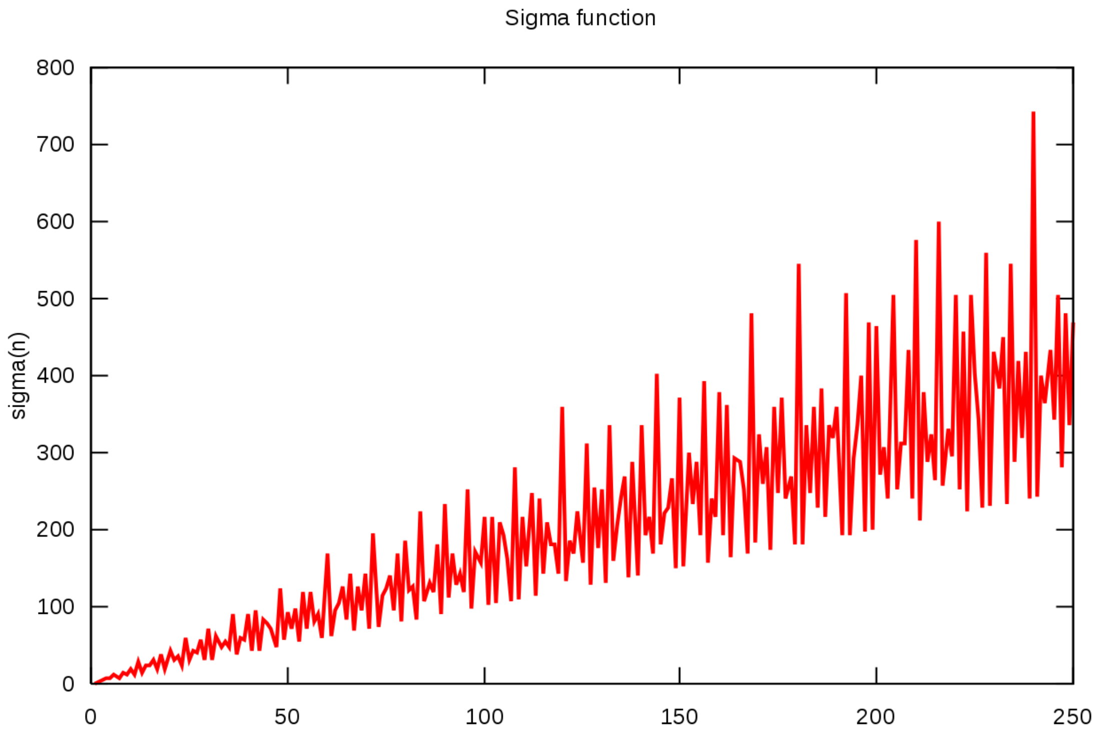


Gráfico de la función $\sigma(n)$

Notar que $\sigma(n)$ sigue siendo irregular. En principio solo se puede asegurar la cota inferior asociada a los números primos. Los siguientes resultados nos permitirán encontrar otras fórmulas para $\sigma(n)$.

Definición 2.6. Una función $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ es multiplicativa si y solo si:

$$f(mn) = f(m)f(n),$$

para m y n coprimos.

Teorema 2.7. Si f es una función multiplicativa y $n = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \dots\, p_j^{k_j}$, entonces $f(n) = f(p_1^{k_1})f(\, p_2^{k_2}) \dots\, f(p_j^{k_j})$

Demostración. Usando inducción sobre la factorización de diferentes números primos de n. Si n tiene un solo primo en su descomposición, entonces $n = p_1^{k_1}$para algún primo p_1, tenemos que $f(n) = f\left(p_1^{k_1}\right)$

Supongamos que el teorema es verdadero para todo n con r primos distintos en su factorización. Ahora veamos el caso donde n tiene $r + 1$ primos distintos, es decir,

$n = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \dots\, p_r^{k_r} p_{r+1}^{k_{r+1}}$

Dado que f es multiplicativa y por ***Proposición 2.2*** tenemos, $\left(p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \dots\, p_r^{k_r}, p_{r+1}^{k_{r+1}}\right) = 1$, entonces $f(n) = f(p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \dots\, p_r^{k_r})f(p_{r+1}^{k_{r+1}})$. Por hipótesis inductiva $f\left(p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \dots\, p_r^{k_r}\right) = f(p_1^{k_1})f(\, p_2^{k_2}) \dots\, f(p_r^{k_r})$, por lo tanto $f(n) = f(p_1^{k_1})f(\, p_2^{k_2}) \dots\, f(p_r^{k_r})f(p_{r+1}^{k_{r+1}})$ completando la demostración.

■

Teorema 2.8. La función suma de divisores $\sigma(n)$ es multiplicativa.

Demostración. Sean a, b coprimos. Entonces a y b no tienen divisores en común y los divisores de ab son enteros de la forma $a_i b_j$, donde a_i es divisor de a y b_j es divisor de b, es decir cualquier divisor d de ab es de la forma $d = a_i b_j$ de forma unívoca donde $a_i | a$ y $b_j | b$. Podemos listar los divisores de a y b:

$$a_0 = 1, a_1, a_2, \dots, a_r = a$$

$$b_0 = 1, b_1, b_2, \dots, b_s = b$$

Por lo tanto, la suma de los divisores es:

$$\sigma(a) = \sum_{i=0}^{r} a_i$$

$$\sigma(b) = \sum_{j=0}^{s} b_j$$

Consideremos ahora, todos los divisores de ab que contengan un a_i fijo, de manera que la suma es:

$$\sum_{j=1}^{s} a_i b_j = a_i \sum_{j=1}^{s} b_j = a_i \sigma(b)$$

Considerando todos los divisores de a y sumándolos

$$\sigma(ab) = \sum_{i=1}^{r} a_i \, \sigma(b) = \sigma(a)\sigma(b)$$

■

Teorema 2.9. Sea $n = p^k$ potencia de un número primo p, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sigma(n) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

Demostración. Los divisores de $n = p^k$ son $1, p, p^2, \dots, p^{k-1}, p^k$.

Por lo tanto, usando la fórmula de la suma geométrica tenemos,

$$\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{k-1} + p^k = \sum_{i=0}^{k} p^i = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

■

Corolario 2.10. Sea $n \in \mathbb{N}$ una potencia de 2, entonces

$$\sigma(n) = 2n - 1$$

Demostración. Sea $n = 2^k$, entonces usando el ***Teorema 2.9*** tenemos,

$$\sigma(n) = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} = 2 \times 2^k - 1 = 2n - 1$$

■

Teorema 2.11. Sea $n \geq 2$ tal que $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ su representación canónica, entonces

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

Demostración*.** Por ***Teorema 2.8 tenemos que

$$\sigma(n) = \sigma\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}\right) = \sigma\left(p_1^{k_1}\right)\sigma\left(p_2^{k_2}\right) \dots \sigma\left(p_r^{k_r}\right)$$

Usando el ***Teorema 2.9*** obtenemos

$$\sigma\left(p_1^{k_1}\right)\sigma\left(p_2^{k_2}\right) \dots \sigma\left(p_r^{k_r}\right) = \left(\frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1}\right) \dots \left(\frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}\right) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

■

Corolario 2.12. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, libre de cuadrados, es decir

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i = p_1 p_2 \dots p_r$$

Entonces,

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} (p_i + 1)$$

Demostración. Aplicando el ***Teorema 2.11*** con $k_i = 1$ tenemos

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^2 - 1}{p_i - 1}$$

Aplicando diferencia de cuadrados,

$$\frac{p_i^2 - 1}{p_i - 1} = \frac{(p_i + 1)(p_i - 1)}{p_i - 1} = p_i + 1$$

■

Corolario 2.13. Sea $n \in \mathbb{N}$, un semiprimo con diferentes factores primos p_1 y p_2 es decir $n = p_1 p_2$, entonces

$$\sigma(n) = (p_1 + 1)(p_2 + 1)$$

Demostración. Usando el ***Corolario 2.13*** tenemos que

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{2}(p_i + 1) = (p_1 + 1)(p_2 + 1)$$

■

De la misma forma que definimos los números altamente compuestos en la ***Definición 2.4*** para $d(n)$, también nos interesa para $\sigma(n)$ caracterizar aquellos números cuya suma de divisores sea grande, en algún sentido.

Definición 2.14. Definimos un número abundante si $\sigma(n) > 2n$ o si la suma de divisores propios $s(n) > n$.

Ejemplo:

$\sigma(11) = 12$ no es abundante.

$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28 > 24$ es abundante.

Primeros números abundantes: $12,18,20,24,30,36,40,42, \ldots$

Definición 2.15. Definimos a n como un número altamente abundante si para todo $m < n$ tenemos que $\sigma(n) > \sigma(m)$.

Primeros números altamente abundantes, $1,2,3,4,6,8,10,12,16,18,20,24,30,36,42,48, \ldots$

Notar que estas definiciones, nos permiten destacar aquellos números cuya suma de divisores sea grande, pero, aun así, tenemos la incertidumbre de que estos números, ya sean abundantes, o altamente abundantes, tienen esa propiedad por ser "suficientemente grandes". Las siguientes definiciones intentan evadir ese problema, normalizando la función.

Definición 2.16. Definimos la abundancia o índice de abundancia como $\sigma(n)/n$.

Ejemplos:

$$\frac{\sigma(31)}{31} = \frac{32}{31} \approx 1{,}03$$

$$\frac{\sigma(32)}{32} = \frac{63}{32} \approx 1{,}96$$

$$\frac{\sigma(p)}{p} = \frac{p+1}{p} = 1 + \frac{1}{p}$$

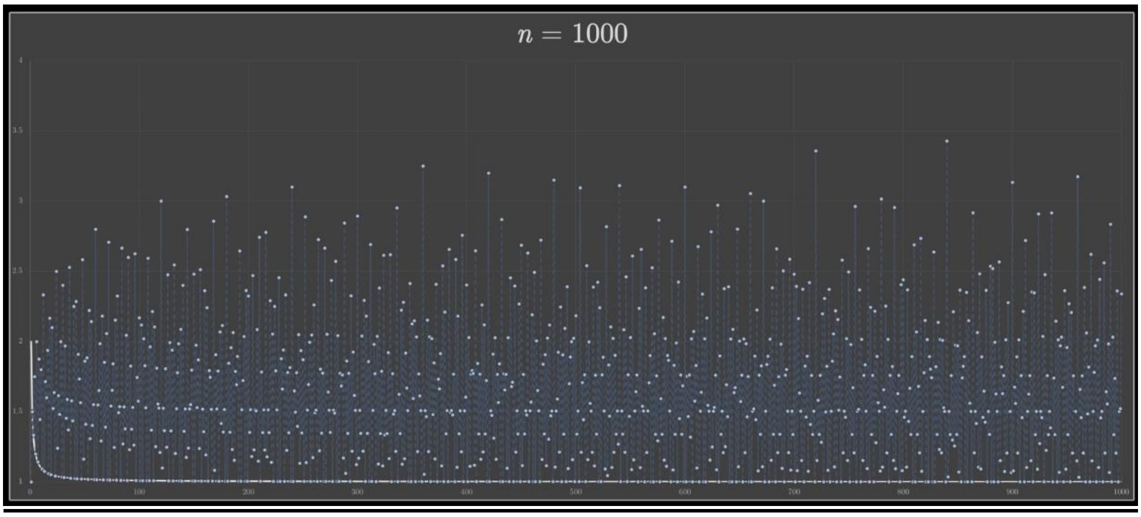
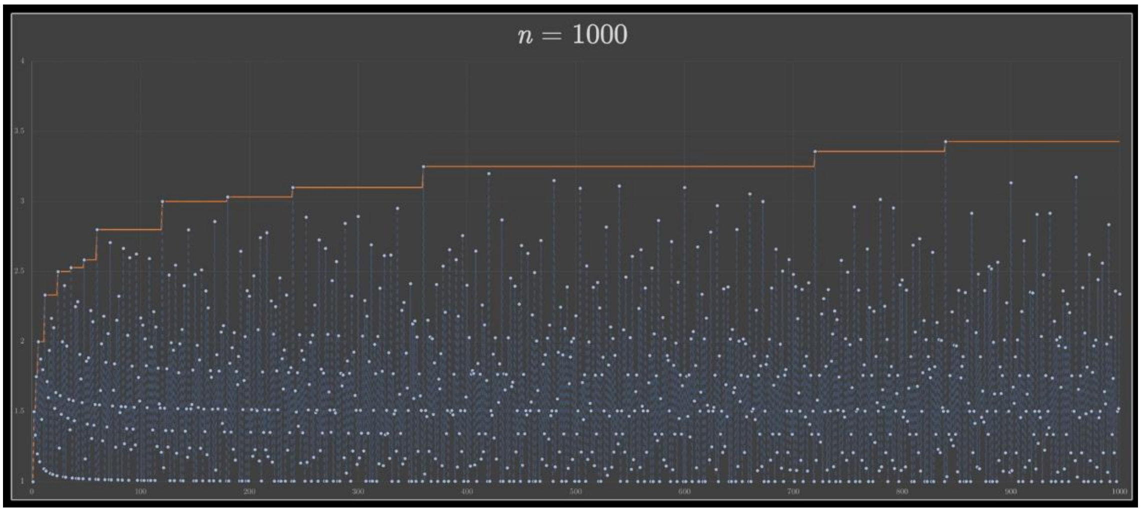


Gráfico de $\frac{\sigma(n)}{n}$ *para* $1 \leq n \leq 1000$. (**Burdette et al., 2020**)

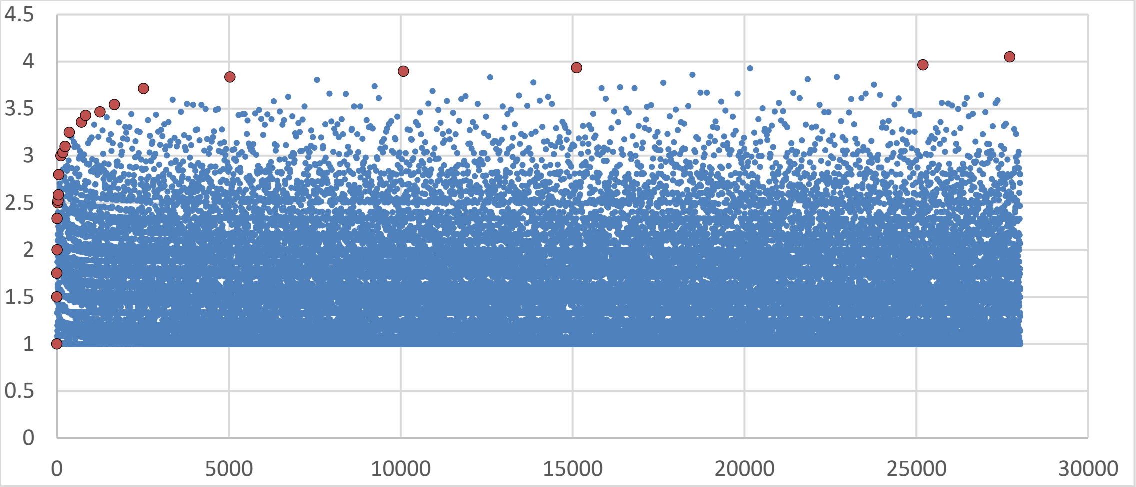
Definición 2.17. Definimos a n como un número superabundante si para todo $m < n$ tenemos que $\frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n}$.

Primeros números superabundantes: 1,2,4,6,12,24,36,48,60,120 ...

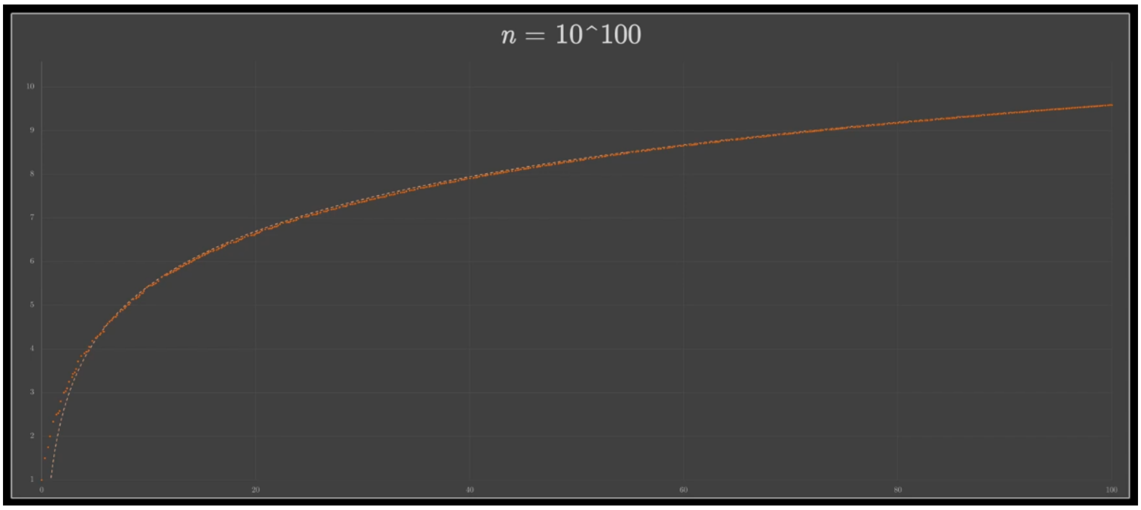
La caracterización de los números superabundantes es similar a la de los números altamente compuestos. Aun así, no todo número superabundante es altamente compuesto y viceversa. Por ejemplo, 7560 es altamente compuesto y no es superabundante. El número 1163962800 es superabundante y no es altamente compuesto.



La línea roja representa los números superabundantes para $1 \leq n \leq 1000$. (**Burdette et al., 2020**)



Los puntos de color naranja representan los números superabundantes con $1 \leq n \leq 28000$



La línea roja representa los números superabundantes para $1 \leq n \leq 10^{100}$. (***Burdette et al.*, 2020**)

Teorema 2.18 (Laatsch, 1986)**.** La función $I(n) = \sigma(n)/n$ no está acotada.

Demostración. Sea n un número natural divisible por todos los enteros $1,2,3, \ldots, k$, consecutivos (por ejemplo $n = k!$), entonces

$$\sigma(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + \cdots + n \geq n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \cdots + \frac{n}{k}$$

Observemos que del lado izquierdo de la desigualdad está la suma de todos los divisores de n y del lado derecho tenemos la suma de un subconjunto de divisores de n.

Por lo tanto

$$I(n) \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$$

Tendiendo k a infinito

$$\lim_{k\to\infty} I(n) \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$$

Del lado derecho nos queda la serie armónica que diverge, entonces $\sigma(n)/n$ también diverge. Observar que $n = n(k)$ y además cuando $k \to \infty$, tenemos que $n \to \infty$.

■

Ejemplo. Si tomamos $k = 31$ y $n = 31!$ entonces

$$I(31!) \approx 6{,}46 \geq \sum_{i=1}^{31} \frac{1}{i} \approx 4{,}02$$

Lema 2.19. La función $I(p^k)$, con p primo y $k \in \mathbb{N}$, es decreciente en p para un k fijo.

Demostración. Usando el ***Teorema 2.9*** tenemos,

$$I(p^k) = \frac{\sigma(p^k)}{p^k} = \frac{p^{k+1} - 1}{p^k(p-1)} = \frac{p - 1/p^k}{p-1}$$

Analizando $\frac{p-1/p^k}{p-1}$ vamos a demostrar que la sucesión $a_n = \frac{n-1/n^k}{n-1}$ es decreciente, es decir $a_{n+1} < a_n$.

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{n+1-\frac{1}{(n+1)^k}}{n} < \frac{n-\frac{1}{n^k}}{n-1} \Leftrightarrow n^2 - 1 - \frac{n-1}{(n+1)^k} < n^2 - \frac{n}{n^k} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1 - \frac{n-1}{(n+1)^k} < -\frac{n}{n^k} \Leftrightarrow \frac{n}{n^k} < 1 + \frac{n-1}{(n+1)^k} \Leftrightarrow \frac{1}{n^{k-1}} < 1 + \frac{n-1}{(n+1)^k}$$

De la última desigualdad podemos ver que para $k \geq 1$ y $n \geq 2$ tenemos que $\frac{1}{n^{k-1}} \leq 1$ y $1 + \frac{n-1}{(n+1)^k} > 1$. Dado que los números primos son un subconjunto de los naturales tenemos el resultado.

■

El siguiente resultado nos da una primera caracterización para los números superabundantes.

Lema 2.20. Si n es un superabundante tal que $n = p_1^{k_1} \,...\, p_r^{k_r}$ entonces contiene todos los primos consecutivos hasta p_r en su factorización canónica.

Demostración. Supongamos que n no contiene todos los primos consecutivos, entonces por lo menos le falta uno, llamémoslo q. Construimos un nuevo número m con igual factorización canónica que n con la excepción que reemplazamos un número primo mayor a q por q con idéntica potencia, llamémoslo q'. Notemos que n no contiene a q pero sí a q' y m no contiene a q' pero sí contiene a q.

Por lo tanto, $m < n$. Veamos que $\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\sigma(m)}{m}$. Usando el ***Teorema 2.8*** (sigma multiplicativa)

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(p_1^{k_1}) \,...\, \sigma\left(q'^{k_q}\right) \,...\, \sigma(p_r^{k_r})}{p_1^{k_1} \,...\, q'^{k_q} \,...\, p_r^{k_r}}$$

$$\frac{\sigma(m)}{m} = \frac{\sigma(p_1^{k_1}) \,...\, \sigma\left(q^{k_q}\right) \,...\, \sigma(p_r^{k_r})}{p_1^{k_1} \,...\, q^{k_q} \,...\, p_r^{k_r}}$$

Cancelando términos obtenemos

$$\frac{\frac{\sigma(n)}{n}}{\frac{\sigma(m)}{m}} = \frac{\sigma(p_1^{k_1}) \,...\, \sigma\left(q'^{k_q}\right) \,...\, \sigma(p_r^{k_r})}{p_1^{k_1} \,...\, q'^{k_q} \,...\, p_r^{k_r}} \frac{p_1^{k_1} \,...\, q^{k_q} \,...\, p_r^{k_r}}{\sigma(p_1^{k_1}) \,...\, \sigma\left(q^{k_q}\right) \,...\, \sigma(p_r^{k_r})} = \frac{\frac{\sigma\left(q'^{k_q}\right)}{q'^{k_q}}}{\frac{\sigma\left(q^{k_q}\right)}{q^{k_q}}} = \frac{I\left(q'^{k_q}\right)}{I\left(q^{k_q}\right)}$$

Por ***Lema 2.19*** y $q' > q$ entonces $\frac{I\left(q'^{k_q}\right)}{I\left(q^{k_q}\right)} < 1$, por lo tanto

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\sigma(m)}{m}$$

Contradiciendo que n es superabundante.

■

Los próximos resultados, nos permiten analizar la distribución de los números superabundantes, dentro de los números naturales.

Proposición 2.21. Sea $n < n'$, dos números superabundantes consecutivos, entonces

$$\frac{n'}{n} \leq 2$$

Demostración. Sea $n = 2^{k_1} \,...\, p_r^{k_r}$ y $2n = 2^{k_1+1} \,...\, p_r^{k_r}$. Entonces

$$\frac{\sigma(2n)/2n}{\sigma(n)/n} = \frac{\left(\frac{2^{k_i+2}-1}{2-1}\right)\prod_{i=2}^{r}\frac{p_i^{k_i+1}-1}{p_i-1}}{\left(\frac{2(2^{k_i+1}-1)}{2-1}\right)\prod_{i=2}^{r}\frac{p_i^{k_i+1}-1}{p_i-1}} = \frac{2^{k_i+2}\ -1}{2^{k_i+2}\ -2} > 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\sigma(2n)}{2n}$$

Como n' es el superabundante consecutivo de n, es el menor número seguido de n tal que $\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\sigma(n\prime)}{n\prime}$, por lo tanto, para cualquier otro numero m que cumpla $\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\sigma(m)}{m}$, debe ser $n' \leq m$. En particular esto es válido para $2n$, entonces $n' \leq 2n$.

■

Corolario 2.22. Existen infinitos números superabundantes.

Demostración. Supongamos que el conjunto de superabundantes S es finito. Sea m el elemento mas grande del conjunto S, entonces por definición de superabundante, m tiene el índice de abundancia mas grande de todos los elementos de S. Pero además posee le índice de abundancia más grande de todos los números naturales, de lo contrario existiría un número $m' > m$ tal que $\frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(m\prime)}{m\prime}$.

Consideremos el número $2m$, por lo enunciado en la ***Proposición 2.21*** sabemos que $\frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(2m)}{2m}$, lo cual es absurdo.

■

Corolario 2.23. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, entonces siempre existe un superabundante $n' \in [x, 2x)$.

Demostración. Consideremos el caso donde x es superabundante, entonces $n' = x$.

En el caso donde x no es superabundante, consideremos n como el superabundante mas grande tal que $n < x$, por lo tanto, no existe otro superabundante entre n y x, y por

Proposición 2.21 existe un superabundante m talque $n < x < m \leq 2n$. Además, como $n < x$ tenemos que $2n < 2x$. Por lo tanto $n' = m$.

■

Observación 2.24. Notar que, si los números superabundantes fueran finitos, podríamos tomar un intervalo $[x, 2x)$ el cual no contenga ningún superabundante.

Los resultados principales a analizar en los próximos capítulos, además de ser aritméticos, también contienen herramientas del análisis. Por eso debemos introducir el concepto de límite superior.

Definición 2.25. Sea $\{a_n\}$ una sucesión, no necesariamente convergente. Sea E el conjunto de los límites de todas las subsucesiones de $\{a_n\}$, entonces definimos

$$\lim_{n\to\infty}\sup a_n = \sup E$$

Proposición 2.26. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones acotadas tales que $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\sup a_n \leq \lim_{n\to\infty}\sup b_n$$

Demostración. Si $\{an\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones acotadas, entonces existe una subsucesión de $\{a_n\}$ y una subsucesión de $\{b_n\}$ convergente, por lo tanto $E_{a_n} \neq \emptyset$ y $E_{b_n} \neq \emptyset$. Notar que E_{a_n} y E_{b_n} son el conjunto de los límites de todas las subsucesiones de $\{a_n\}$ y de $\{b_n\}$ respectivamente.

Definimos $\sup E_{a_n} = A$ y $\sup E_{b_n} = B$, entonces sabemos que existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$ y una subsucesión $\{b_{n_j}\}$ tal que $\lim_{j\to\infty} b_{n_j} = B$.

Como $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $a_{n_k} < b_{n_j}$ y tenemos $A = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} b_{n_j} = B$, o lo que es lo mismo

$$\lim_{n\to\infty}\sup a_n \leq \lim_{n\to\infty}\sup b_n$$

■

3 – Hipótesis de Riemann

En este capítulo presentamos la desigualdad de Robin (Robin, 1984), un resultado en la teoría de números que nos permite entender la dificultad de la hipótesis de Riemann original a través del estudio de la función suma de divisores. Además, esta desigualdad nos permite analizar la hipótesis de Riemann desde una perspectiva diferente, que combina tanto la teoría de números aritmética como analítica.

El orden de los temas que vamos a tratar en este capítulo es el siguiente: primero presentaremos la historia y descripción de la hipótesis de Riemann original formulada por Bernhard Riemann (Riemann, 1859). Luego, hablaremos sobre la función zeta de Riemann y su ecuación funcional que se utiliza para estudiar la hipótesis de Riemann. Finalmente, llegamos a la desigualdad de Robin y algunos de los resultados relacionados que vamos a utilizar en los capítulos siguientes.

En resumen, en este capítulo nos enfocamos en la desigualdad de Robin y sus implicancias en el análisis de la hipótesis de Riemann. Algunos de los resultados que presentamos están contenidos y desarrollados ampliamente en libros especializados del tema (Edwards, 1974).

Comenzamos definiendo la función zeta de Riemann, de gran importancia para la formulación de la hipótesis de Riemann.

Definición 3.1 (Función ζ de Riemann). Definimos la función zeta de Riemann como la serie infinita:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

La serie converge para $Re(s) > 1$.

Casos pares. La función zeta de Riemann tiene su expresión para los casos pares positivos encontrada inicialmente por Euler:

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{(k-1)}(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}$$

Donde B_{2k}, son los números de Bernoulli definidos de varias formas. Una de ellas es mediante la serie de Taylor de la función generatriz:

$$G(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

con $|x| < 2\pi$

De esta fórmula se obtiene que:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

...

Y se puede observar que $\zeta(s) \to 1$ cuando $Re(s) \to \infty$

$$\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lim_{s\to\infty} \frac{1}{n^s}) = 1 + 0 + 0 + \cdots$$

Para un desarrollo más completo de este tema ver (Arfken, 1970).

Casos impares. Para los casos impares positivos $\zeta(2k+1)$ tenemos los siguientes resultados:

- $\zeta(3)$ es irracional (Apéry, 1979).
- Hay infinitos números de la forma $\zeta(2k+1)$ que son irracionales. (Rivoal, 2000)
- Al menos uno de $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ y $\zeta(11)$ es irracional. (Sudilin, 2001)

Continuidad analítica. La continuación analítica permite extender el dominio de una función analítica. La función Zeta de Riemann se puede extender no solo a la forma divergente sino a los números complejos mediante la ecuación funcional:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} sen\left(\frac{\pi}{2}s\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Para $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 1$, donde Γ es la función Gamma, generalización del factorial de un número natural. Si $s = -2, -4, -6, ...$ entonces $\zeta(s) = 0$ son los ceros triviales de la función Zeta de Riemann. Para los casos pares positivos ya hemos visto que $\zeta(s) > 0$. Para la demostración de este resultado ver capítulo 1.6 de (Edwards, 1974).

Hipótesis de Riemann. La hipótesis de Riemann es uno de los problemas abiertos más importantes de las matemáticas, conjeturado por Bernhard Riemann en su artículo de 1859. Dada su importancia el Clay Mathematics Institute lo incluyó como uno de los 7 problemas del milenio ofreciendo 1 millón de dólares para quien logre demostrarlo (Bombieri, 2014).

Conjetura. (Hipótesis de Riemann).

$$Los\ ceros\ no\ triviales\ de\ \zeta(s)\ tienen\ Re(s) = \frac{1}{2}$$

La formulación original de la hipótesis de Riemann requiere de herramientas sofisticadas del análisis complejo. Es de nuestro interés analizar las equivalencias que muestran el problema desde una perspectiva diferente, en nuestro caso desde una perspectiva aritmética, vinculando el problema principal con los divisores de un número natural. Para ello exhibimos la equivalencia demostrada por Guy Robin en 1984.

Desigualdad de Robin.

Teorema 3.2. La hipótesis de Riemann es equivalente a demostrar la desigualdad:

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log(log(n))$$

Para $n > 5040$, donde γ es la constante de Euler-Mascheroni y $e^{\gamma} \approx 1{,}781$.

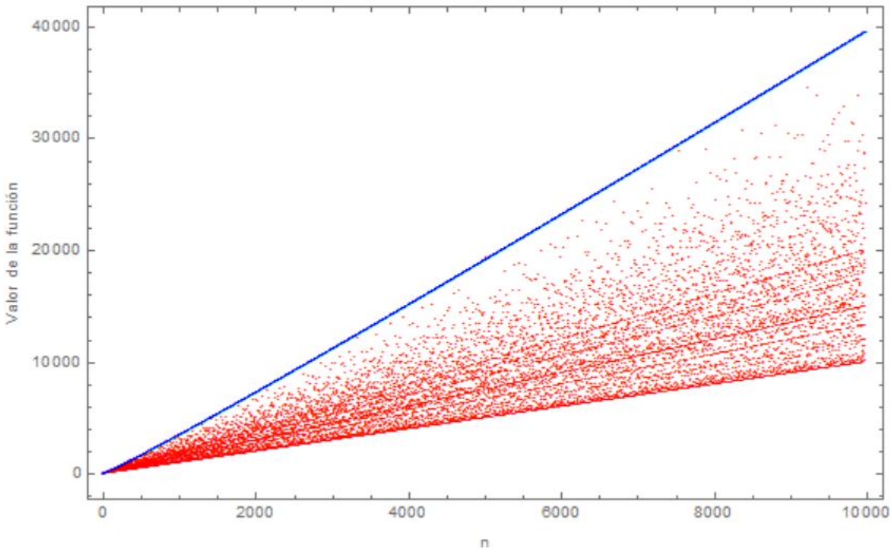


Gráfico de $\sigma(n)$ *en color rojo y* $e^{\gamma}\, n \log \log(n)$ *en color azul para* $1 \leq n \leq 10000$

Demostración. Ver (Robin, 1984)**.**

■

Observación 3.3. Podemos reescribir la desigualdad de Robin en términos del índice de abundancia de la siguiente forma:

$$\frac{\sigma(n)}{n} < e^{\gamma} \log(log(n))$$

Notar que esto implica que la Hipótesis de Riemann nos brinda una cota para el índice de abundancia de los números superabundantes.

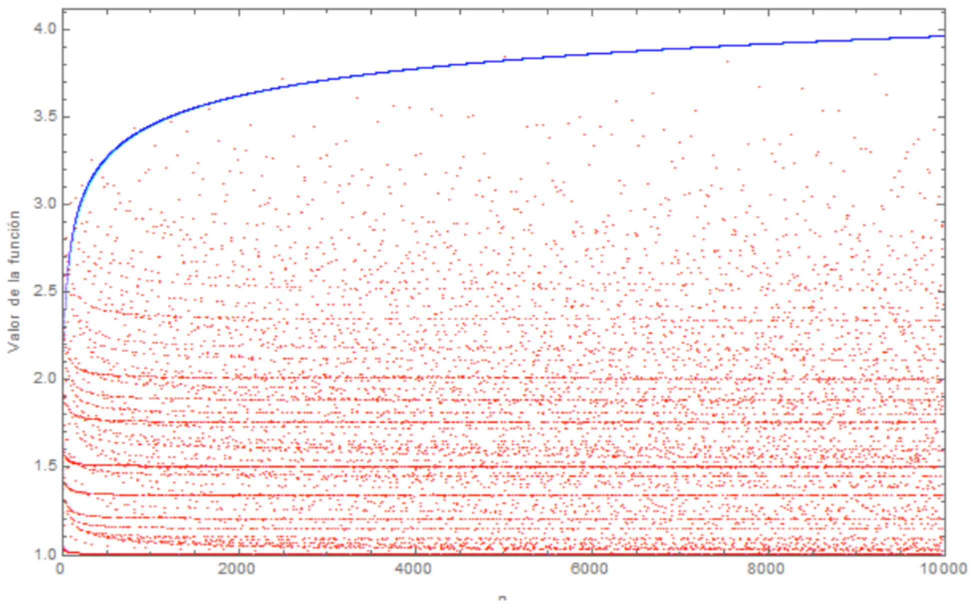


Gráfico de $\frac{\sigma(n)}{n}$ *en color rojo y* $e^{\gamma} \log \log(n)$ *en color azul.*

De la misma manera, podemos reescribir la desigualdad acotando por e^{γ}:

$$G(n) = \frac{\sigma(n)}{n\log(log(n))} < e^{\gamma}$$

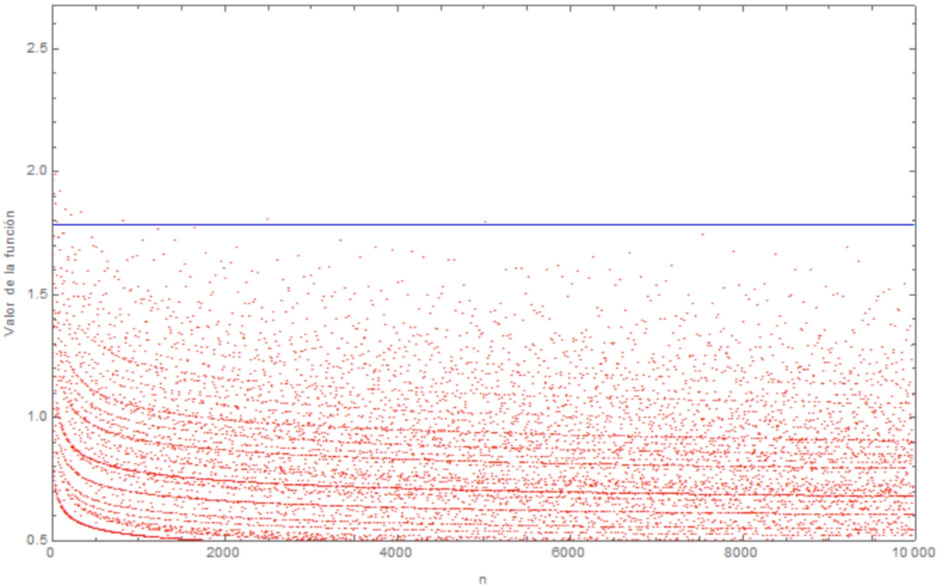
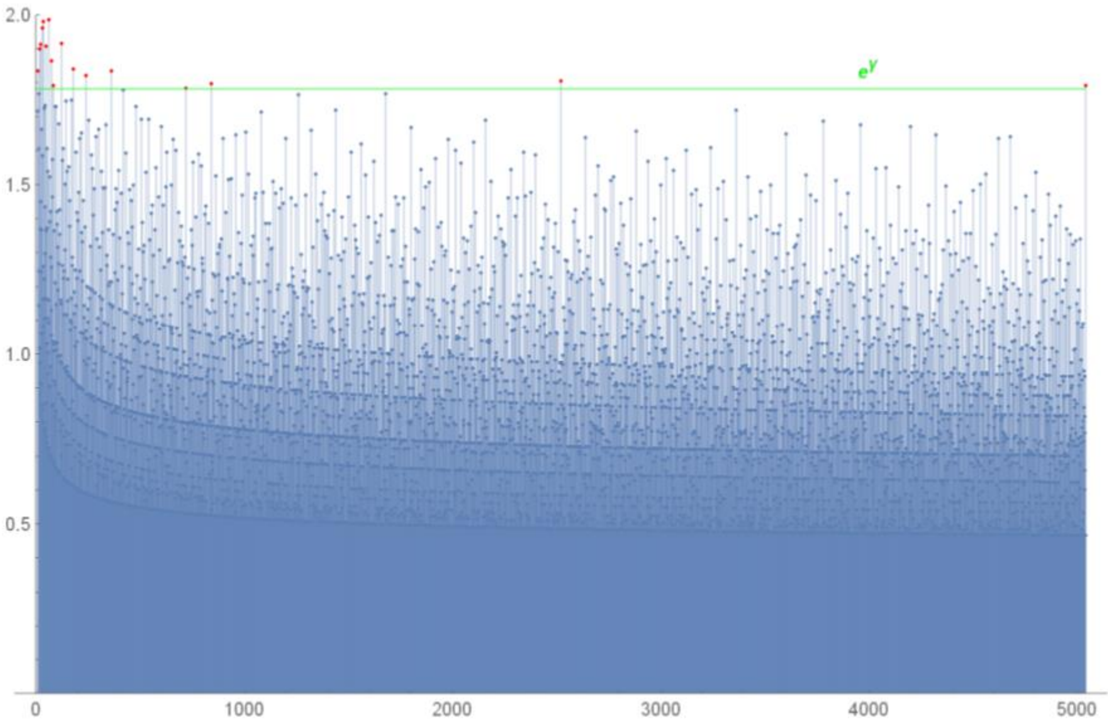


Gráfico de $G(n)$ en rojo y e^{γ} en color azul.

En el siguiente gráfico podemos observar en rojo los casos de $G(n) > e^{\gamma}$ para $n \leq 5040$.



En azul tenemos los valores que cumplen $G(n) < e^{\gamma}$ y en rojo $G(n) \geq e^{\gamma}$.

Constante de Euler-Mascheroni. La Constante de Euler-Mascheroni se encuentra en el ámbito de la Teoría de los Números y de la Teoría de la Probabilidad. Esta se representa como γ y se calcula como el límite de la diferencia entre la Suma Armónica y el Logaritmo Natural. Esta constante es una medida de la diferencia de convergencia entre la Suma Armónica y el Logaritmo Natural, siendo su resultado una constante que nos indica que la velocidad de convergencia es semejante.

La constante de Euler-Mascheroni se define como:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) = 0{,}57721 \ldots$$

No se sabe si es irracional y si es racional su denominador es mayor a 10^{244663} (Haible, Papanikolaou, 1998).

La siguiente desigualdad es también resultado del mismo artículo de Guy Robin y nos proporciona una cota directa, a diferencia de la desigualdad de Robin original del ***Teorema 3.2*** que es una conjetura equivalente a la hipótesis de Riemann. La desigualdad mostrada a continuación nos permite ver que, en el caso de que existan contraejemplos a la desigualdad original, éstos no pueden alejarse demasiado de la misma.

Teorema 3.4

$$\sigma(n) \leq e^{\gamma} n \log(log(n)) + n \frac{0{,}6482 \ldots}{log(log(n))}$$

Para $n \geq 3$ con la igualdad para $n = 12$, donde

$$\frac{7}{3} \log(log(12)) - e^{\gamma} \log^2(log(12)) \approx 0{,}648214$$

Demostración. Ver (Robin, 1984).

∎

En los siguientes gráficos podemos comparar la diferencia entre la desigualdad de Robin equivalente a la hipótesis de Riemann ***(Teorema 3.2)*** en negro y la desigualdad de Robin incondicional ***(Teorema 3.4)*** en verde.

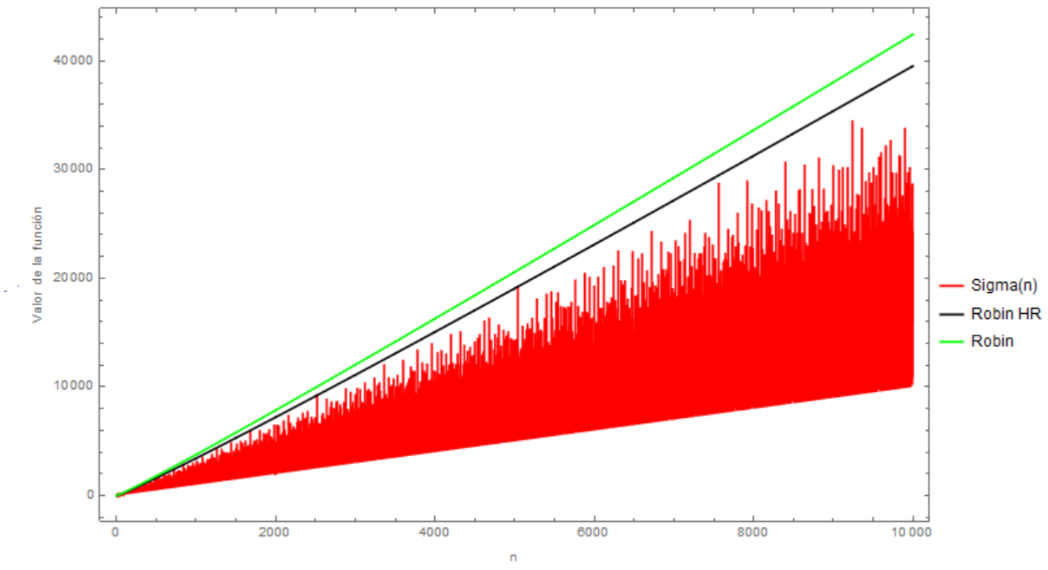
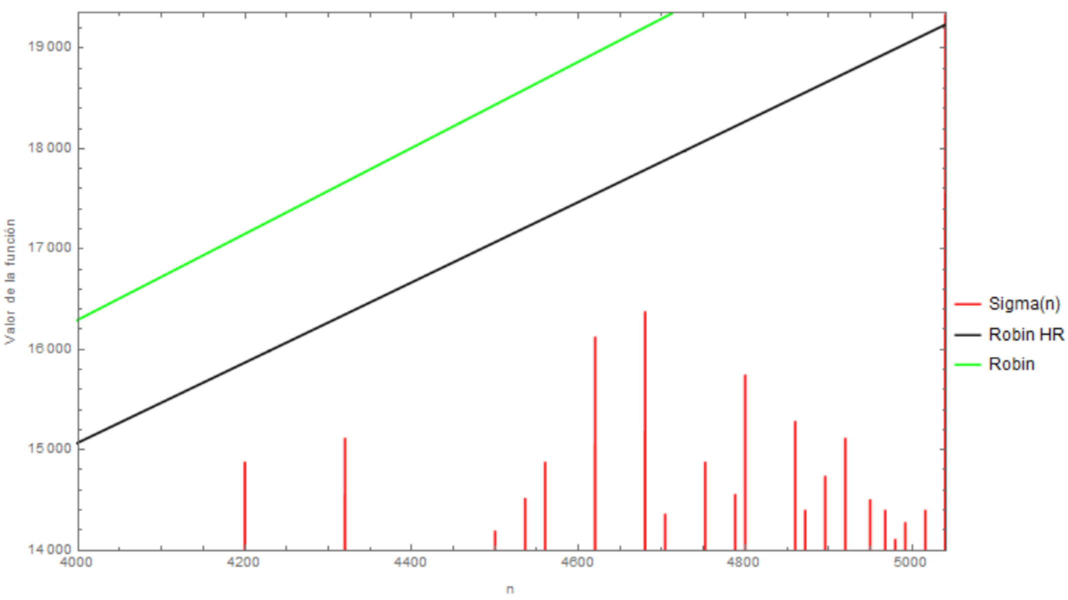


Gráfico de $\sigma(n)$ *en color rojo,* $e^{\gamma} n \, log(log(n))$ *en color negro y*

$e^{\gamma} n \, log(log(n)) + n \frac{0{,}6482\ldots}{log(log(n))}$ *en color verde para* $1 \leq n \leq 10000$.



Mismo gráfico para $4000 \leq n \leq 5040$ *donde se puede observar mejor la distancia entre*

$e^{\gamma} n \, log(log(n))$ *en color negro y* $e^{\gamma} n \, log(log(n)) + n \frac{0{,}6482\ldots}{log(log(n))}$ *en color verde.*

En el siguiente gráfico se puede observar lo que ocurre para $n = 5040$. $\sigma(5040)$ se encuentra por encima de la cota equivalente a la hipótesis de Riemann, pero por debajo de la cota incondicional. Recordemos que la desigualdad de Robin ***(Teorema 3.2)*** debe cumplirse para $n > 5040$, ya que como podemos ver, podemos encontrar contraejemplos para $n \leq 5040$.

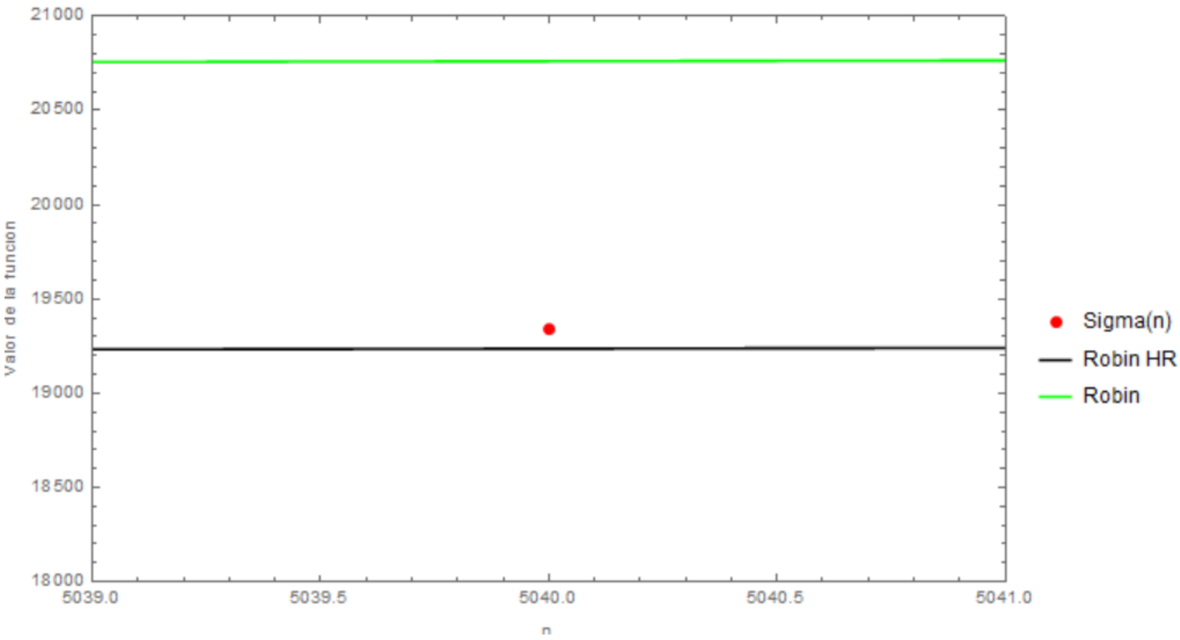


Gráfico para $5039 \leq n \leq 5041$ *donde se puede observar*

$e^{\gamma} n\, log(log(n)) < \sigma(5040) < e^{\gamma} n\, log(log(n)) + n \frac{0{,}6482\ldots}{log(log(n))}$

El siguiente teorema es de suma importancia para los resultados principales de los próximos capítulos, ya que asegura que $\sigma(n)$ se acerca asintóticamente a $e^{\gamma} n\, log(log(n))$.

Teorema 3.5 (Teorema de Grönwall)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n\, log(log(n))} = e^{\gamma}$$

Demostración. Ver (Grönwall, 1913).

■

Se conocen ciertos resultados sobre las características que tendrían los contraejemplos a la desigualdad de Robin, si estos existen. El siguiente resultado nos da la real importancia de los números superabundantes definidos en el capítulo anterior.

Teorema 3.6. Si existen contraejemplos a la desigualdad de Robin, **(*Teorema 3.2*)**, estos son infinitos y el primero es un número superabundante.

Demostración. Ver (Robin, 1984) y (Akbary, Friggstad, 2009).

■

Existen otras equivalencias que involucran a la suma de los divisores de un número. Mostramos como ejemplo la desigualdad de Lagarias (Lagarias, 2002), la cual, a diferencia de la desigualdad de Robin, comienza en $n > 1$ y no involucra la constante de Euler-Mascheroni. La desigualdad se deduce que la velocidad de divergencia tanto de la función logaritmo como de la serie armónica son similares.

Teorema 3.7. La hipótesis de Riemann es equivalente a la siguiente desigualdad,

$$\sigma(n) \leq H_n + e^{H_n}\log(H_n)$$

Para $n > 1$, donde $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, es la suma parcial de la serie armónica.

Demostración. Ver (Lagarias, 2002).

■

Estas no son las únicas equivalencias a la hipótesis de Riemann asociadas a la desigualdad de Robin, para más detalles sobre otras equivalencias ver (Broughan, 2017).

4 – Propiedades de los números superabundantes

En este capítulo, presentamos algunos teoremas sobre la caracterización de números superabundantes que fueron definidos inicialmente por (Ramanujan, 1997). En particular, exploramos tres teoremas demostrados por L. Alaoglu y P. Erdős (Alaoglu, Erdös, 1944) en su artículo *"On highly composite and similar numbers"*. El primer teorema demuestra que un número superabundante tiene en su factorización canónica a todos los primos consecutivos hasta algún máximo con los respectivos exponentes de forma decreciente; el segundo teorema da una noción de distancia entre estos exponentes y una cota que se debe cumplir; y el tercero expresa una cota para el exponente del primo 2. Vale la pena mencionar que existen pocos algoritmos eficientes para computar los números superabundantes (Briggs, 2009).

También analizamos dos teoremas del artículo *"Robin's Theorem, Primes, and a New Elementary Reformulation of the Riemann Hypothesis"* de G. Caveney, J.L. Nicolas y J. Sondow (Caveney, Nicolas, Sondow, 2011). Estos resultados utilizan los tres teoremas de Alaoglu y Erdős para mostrar otras características de los números superabundantes.

Existe poca literatura sobre números superabundantes y la hipótesis de Riemann, muchos de estos resultados se pueden encontrar en (Broughan, 2017).

El primer resultado continua la caracterización de los números superabundantes comenzada en el capítulo 2 con el ***Lema 2.20*** que afirmaba que un número superabundante contiene todos los primos consecutivos en su factorización prima.

Lema 4.1 (Alaoglu, Erdös, 1944). Si n es un superabundante tal que $n = p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$ entonces los exponentes son decrecientes, es decir $k_q \geq k_{q'}$ para todo q, q' con $p_q < p_{q'} \leq p_r$.

Demostración. Notemos en primer lugar que la siguiente función es decreciente:

$$g(x) = \frac{x^n - 1}{x^n - x}$$

para $n \geq 2$ y $x \geq 2$. Verificamos que $g'(x) < 0$. La derivada es

$$g'(x) = -\frac{(n-1)x^n}{(x^n - x)^2} - \frac{1}{(x^n - x)^2} + \frac{nx^{n-1}}{(x^n - x)^2}$$

Dado que el denominador es siempre positivo, verificamos que el numerador es negativo.

$$(n-1)x^n + 1 - nx^{n-1} > 0 \Leftrightarrow (n-1)x^n + 1 > nx^{n-1} \Leftrightarrow \frac{(n-1)}{n}x + \frac{1}{nx^{n-1}} > 1$$

Dado que $a_n = \frac{n-1}{n}$ es creciente con mínimo $\frac{1}{2}$ en $n = 2$ y $x \geq 2$ el término $\frac{(n-1)}{n}x \geq 1$.

Entonces $g'(x) < 0$ por lo tanto $g(x)$ es decreciente para x. Podemos verificar que también es decreciente para la variable n

$$g'(n) = -\frac{(-1 + x)x^n \log(x)}{(x - x^n)^2}$$

Podemos ver que para $n \geq 2$ y $x \geq 2$, $g'(n) < 0$.

Supongamos ahora que los exponentes no son decrecientes, entonces existen q, q' con $p_q < p_{q'}$ tales que $k_q < k_{q'}$. Definimos $n' = np_q/p_{q'}$, notar que $n' < n$. Como n es superabundante tenemos que $\frac{\sigma(n')}{n'} < \frac{\sigma(n)}{n}$.

Al igual que en el ***Lema 2.20*** obtenemos,

$$\frac{\frac{\sigma(n)}{n}}{\frac{\sigma(n')}{n'}} =$$

$$= \frac{\sigma(p_1^{k_1}) \dots \sigma\left(p_q^{k_q}\right) \dots \sigma\left(p_{q'}^{k_{q'}}\right) \dots \sigma(p_r^{k_r})}{p_1^{k_1} \dots p_q^{k_q} \dots p_{q'}^{k_{q'}} \dots p_r^{k_r}} \frac{p_1^{k_1} \dots p_q^{k_q+1} \dots p_{q'}^{k_{q'}-1} \dots p_r^{k_r}}{\sigma(p_1^{k_1}) \dots \sigma\left(p_q^{k_q+1}\right) \dots \sigma\left(p_{q'}^{k_{q'}-1}\right) \dots \sigma(p_r^{k_r})}$$

$$= \frac{\sigma\left(p_q^{k_q}\right)\sigma\left(p_{q'}^{k_{q'}}\right)}{p_q^{k_q} p_{q'}^{k_{q'}}} \frac{p_q^{k_q+1} p_{q'}^{k_{q'}-1}}{\sigma\left(p_q^{k_q+1}\right)\sigma\left(p_{q'}^{k_{q'}-1}\right)} = \frac{\sigma\left(p_q^{k_q}\right)\sigma\left(p_{q'}^{k_{q'}}\right)}{p_{q'}} \frac{p_q}{\sigma\left(p_q^{k_q+1}\right)\sigma\left(p_{q'}^{k_{q'}-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{p_q^{k_q+1}-1}{p_q-1}\frac{p_{q'}^{k_{q'}+1}-1}{p_{q'}-1}}{p_{q'}} \frac{p_q}{\frac{p_q^{k_q+2}-1}{p_q-1}\frac{p_{q'}^{k_{q'}}-1}{p_{q'}-1}} = \frac{p_q^{k_q+2}-p_q}{p_q^{k_q+2}-1} \frac{p_{q'}^{k_{q'}+1}-1}{p_{q'}^{k_{q'}+1}-p_{q'}}$$

$$\frac{\sigma(n')}{n'} < \frac{\sigma(n)}{n} \Leftrightarrow 1 < \frac{\frac{\sigma(n)}{n}}{\frac{\sigma(n')}{n'}} \Leftrightarrow 1 < \frac{p_q^{k_q+2}-p_q}{p_q^{k_q+2}-1} \frac{p_{q'}^{k_{q'}+1}-1}{p_{q'}^{k_{q'}+1}-p_{q'}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_q^{k_q+2}-1}{p_q^{k_q+2}-p_q} < \frac{p_{q'}^{k_{q'}+1}-1}{p_{q'}^{k_{q'}+1}-p_{q'}}$$

Como analizamos previamente $g(x) = \frac{x^n-1}{x^n-x}$ es una función decreciente en x y n para $x, n \geq 2$, por lo tanto, la inecuación no se cumple.

Para el caso $n = 1$ se llega al mismo resultado con igual razonamiento.

■

Es posible demostrar también, que todo número superabundante tiene el exponente 1 en el último primo de su factorización canónica exceptuando a los números 4 y 36. Para la demostración de este resultado, ver el Teorema 3 en (Alaoglu, Erdös, 1944).

El siguiente lema nos permite restringir los posibles valores para los exponentes de los primos en la factorización canónica de un número superabundante.

Lema 4.2 (Alaoglu, Erdös, 1944). Sea n superabundante tal que $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ y $p_q < p_{q'} \leq p_r$. Sea $\beta = \lfloor k_q \frac{\log(p_q)}{\log(p_{q'})} \rfloor$, entonces $k_{q'}$ tiene uno de los tres valores siguientes: $\beta - 1, \beta + 1, \beta$.

Demostración. Supongamos primero que $k_{q'} \leq \beta - 2$. Definimos $x \in \mathbb{N}$ dado por las desigualdades $p_q^{x-1} < p_{q'} < p_q^x$. Veamos que $k_q \geq x$. Por el absurdo suponemos $k_q < x$ entonces $k_q \leq x - 1$ por lo tanto

$$p_q^{k_q} \leq p_q^{x-1} < p_{q'} \leq p_{q'}^{k_{q'}} \leq p_{q'}^{\beta-2} = p_{q'}^{\beta} p_{q'}^{-2} \leq p_q^{k_q} p_{q'}^{-2} < p_q^{k_q}$$

Lo cual es falso, por lo tanto $k_q \geq x$.

Observemos que usamos la desigualdad $p_{q'}^{\beta} \leq p_q^{k_q}$ ya que aplicando logarítmo se obtiene $\beta = \left\lfloor k_q \frac{\log(p_q)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor \leq k_q \frac{\log(p_q)}{\log(p_{q'})}$.

Definimos $n' = \frac{np_{q'}}{p_q^x}$, notar que $k_q \geq x$ implica que $n' < n$. Usando que n es superabundante y cancelando términos tenemos lo siguiente

$$\frac{\sigma\left(p_q^{k_q-x} p_{q'}^{k_{q'}+1}\right)}{p_q^{k_q-x} p_{q'}^{k_{q'}+1}} < \frac{\sigma\left(p_q^{k_q} p_{q'}^{k_{q'}}\right)}{p_q^{k_q} p_{q'}^{k_{q'}}} \Leftrightarrow$$

$$p_q^x \frac{p_{q'}^{k_{q'}+2} - 1}{p_{q'} - 1} \frac{p_q^{k_q-x+1} - 1}{p_q - 1} < p_{q'} \frac{p_{q'}^{k_{q'}+1} - 1}{p_{q'} - 1} \frac{p_q^{k_q+1} - 1}{p_q - 1} \Leftrightarrow$$

$$(p_{q'}^{k_{q'}+2} - 1)(p_q^{k_q+1} - p_q^x) < (p_{q'}^{k_{q'}+2} - p_{q'})(p_q^{k_q+1} - 1) \Leftrightarrow$$

$$p_{q'}^{k_{q'}+2} p_q^{k_q+1} - p_{q'}^{k_{q'}+2} p_q^x - p_q^{k_q+1} + p_q^x < p_{q'}^{k_{q'}+2} p_q^{k_q+1} - p_{q'}^{k_{q'}+2} - p_{q'} p_q^{k_q+1} + p_{q'}$$

Cancelando y reordenando términos obtenemos

$$(p_{q'} - 1)\, p_q^{k_q+1} + p_q^x < (p_q^x - 1) p_{q'}^{k_{q'}+2} + p_{q'}$$

Notar que $p_q^{x-1} \leq p_{q'} - 1$ entonces $p_q^x \leq p_q(p_{q'} - 1)$ es decir $p_q^x - 1 < p_q(p_{q'} - 1)$, usando esto tenemos

$$\left(p_q^x - 1\right) p_{q'}^{k_{q'}+2} + p_{q'} \leq \left(p_q^x - 1\right) p_{q'}^{\beta} + p_q^x < p_q(p_{q'} - 1) p_{q'}^{\beta} + p_q^x$$

$$\leq (p_{q'} - 1) p_q^{k_q+1} + p_q^x < (p_q^x - 1) p_{q'}^{k_{q'}+2} + p_{q'}$$

teniendo en cuenta que $p_{q'}^{\beta} \leq p_q^{k_q}$. La contradicción anterior muestra que $k_{q'} \geq \beta - 1$.

Ahora supongamos que $k_{q'} \geq \beta + 2$, nuevamente definimos $x \geq 2$, tal que $p_q^{x-1} < p_{q'} < p_q^x$. Entonces como $p_q^{x-1} < p_{q'}$ tenemos que $p_q^{k_q+x-1} p_{q'}^{k'_q-1} < p_{q'}^{k'_q} p_q^{k_q}$.
Definimos un $n' = \frac{np_q^{x-1}}{p_{q'}}$

Definimos $n' = \frac{np_q^{x-1}}{p_{q'}}$. Usando que n es superabundante y cancelando términos tenemos lo siguiente

$$\frac{\sigma\left(p_q^{k_q+x-1}p_{q'}^{k_{q'}-1}\right)}{p_q^{k_q+x-1}p_{q'}^{k'_q-1}} < \frac{\sigma\left(p_q^{k_q}p_{q'}^{k_{q'}}\right)}{p_q^{k_q}p_{q'}^{k_{q'}}} \Leftrightarrow$$

$$p_{q'}\frac{p_{q'}^{k_{q'}}-1}{p_{q'}-1}\frac{p_q^{k_q+x}-1}{p_q-1} < p_q^{x-1}\frac{p_{q'}^{k_{q'}+1}-1}{p_{q'}-1}\frac{p_q^{k_q+1}-1}{p_q-1} \Leftrightarrow$$

$$(p_{q'}^{k_{q'}+1}-p_{q'})(p_q^{k_q+x}-1) < (p_{q'}^{k_{q'}+1}-1)(p_q^{k_q+x}-p_q^{x-1}) \Leftrightarrow$$

$$p_{q'}^{k_{q'}+1}p_q^{k_q+x}-p_{q'}p_q^{k_q+x}-p_{q'}^{k_{q'}+1}+p_{q'} < p_{q'}^{k_{q'}+1}p_q^{k_q+x}-p_q^{k_q+x}-p_{q'}^{k_{q'}+1}p_q^{x-1}+p_q^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow p_{q'}^{k_{q'}+1}p_q^{x-1}-p_{q'}^{k_{q'}+1}+p_{q'} < -p_q^{k_q+x}+p_q^{x-1}+p_{q'}p_q^{k_q+x} \Leftrightarrow$$

$$p_{q'}^{k_{q'}+1}(p_q^{x-1}-1)+p_q^{x-1} < p_{q'}^{k_{q'}+1}(p_q^{x-1}-1)+p_{q'} < p_q^{k_q+x}(p_{q'}-1)+p_q^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$p_{q'}^{k_{q'}+1}(p_q^{x-1}-1) < p_q^{k_q+x}(p_{q'}-1) \Leftrightarrow$$

$$p_{q'}^2(p_q^{x-1}-1) < \frac{p_q^{k_q+x}}{p_{q'}^{k_{q'}-1}}(p_{q'}-1) < \frac{p_q^{k_q+x}}{p_{q'}^{\beta+1}}(p_{q'}-1) < p_q^x(p_{q'}-1)$$

Notar que $p_{q'}^{\beta+1} > p_q^{k_q}$.

Dada la función $G(r) = \frac{r^2}{r-1}$ creciente para $r \geq 2$ y la función $H(x) = \frac{q^x}{q^{x-1}-1}$ decreciente para $x \geq 2$ tenemos que

$$p_{q'}^2(p_q^{x-1}-1) < \frac{p_q^{k_q+x}}{p_{q'}^{k_{q'}-1}}(p_{q'}-1) < \frac{p_q^{k_q+x}}{p_{q'}^{\beta+1}}(p_{q'}-1) < p_q^x(p_{q'}-1)$$

$$\frac{p_{q'}^2}{(p_{q'}-1)} < \frac{p_q^x}{\left(p_q^{x-1}-1\right)} \leq \frac{p_q^2}{\left(p_q-1\right)}$$

Absurdo, ya que $G(r)$ es creciente y $p_q < p_{q'}$, por lo tanto $k_{q'} \leq \beta + 1$.

■

Corolario 4.3. El ***Lema 4.2*** es equivalente a la siguiente desigualdad

$$\left|\left\lfloor k_q\frac{\log\left(p_q\right)}{\log\left(p_{q'}\right)}\right\rfloor - k_{q'}\right| \leq 1$$

Demostración. Según el lema anterior tenemos $\beta = \left\lfloor k_q \frac{\log(p_q)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor$ y $k_{q'}$ puede tomar uno de los siguientes valores $\beta - 1, \beta + 1, \beta$. Esto es equivalente a la siguiente desigualdad

$$\left\lfloor k_q \frac{\log(p_q)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor - 1 \leq k_{q'} \leq \left\lfloor k_q \frac{\log(p_q)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor + 1 \iff$$

$$-\left\lfloor k_q \frac{\log(p_q)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor + 1 \geq -k_{q'} \geq -\left\lfloor k_q \frac{\log(p_q)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor - 1 \iff$$

$$1 \geq -k_{q'} + \left\lfloor k_q \frac{\log(p_q)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor \geq -1 \iff$$

$$-1 \leq \left\lfloor k_q \frac{\log(p_q)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor - k_{q'} \leq 1 \iff$$

$$\left| \left\lfloor k_q \frac{\log(p_q)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor - k_{q'} \right| \leq 1$$

■

Corolario 4.4. Sea n un superabundante, dado $p_{q'}$ y $k_{q'}$ fijos, definidos de igual manera que ***Teorema 4.2***. Entonces la potencia de 2 en la factorización prima de n (k_1) está acotada, es decir $k_1 < B = B(p_{q'}, k_{q'})$.

Demostración. Aplicando el ***Corolario 4.3*** con $p_q = p_1 = 2$ y con $k_q = k_1$ tenemos

$$\left| \left\lfloor k_1 \frac{\log(2)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor - k_{q'} \right| \leq 1$$

En particular vale

$$\left\lfloor k_1 \frac{\log(2)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor - k_{q'} \leq 1 \iff$$

$$\left\lfloor k_1 \frac{\log(2)}{\log(p_{q'})} \right\rfloor \leq 1 + k_{q'}$$

Sacando la parte entera y acotando tenemos

$$k_1 \frac{\log(2)}{\log(p_{q'})} < k_{q'} + 2 \iff$$

$$k_1 < \left(k_{q'} + 2\right)\frac{\log\left(p_{q'}\right)}{\log(2)} = B$$

■

Lema 4.5 (Alaoglu, Erdös, 1944)**.** Dado $n = p_1^{k_1} \ \ldots p_r^{k_r}$ superabundante, tenemos que $p_q^{k_q} < 4.2^{k_1}$.

Demostración. Supongamos primero que $k_q \leq \beta = \left\lfloor k_1 \frac{\log(2)}{\log(p_q)} \right\rfloor$ entonces vale que $p_q^{k_q} \leq 2^{k_1} < 4.\,2^{k_1}$. Esto es porque $k_q \leq \beta = \left\lfloor k_1 \frac{\log(2)}{\log(p_q)} \right\rfloor \leq k_1 \frac{\log(2)}{\log(p_q)}$ comparando los dos extremos de la desigualdad llegamos a $p_q^{k_q} \leq 2^{k_1}$, entonces vale $p_q^{k_q} < 4.\,2^{k_1}$.

Veamos ahora el caso donde $k_q > \beta$. Según el ***Lema 4.2*** tenemos que $k_q = \beta + 1$.

Supongamos que existe un n superabundante tal que $p_q^{k_q} > 4.2^{k_1} = 2^{k_1+2}$, notar que como p_q es primo, no pueden ser iguales. Definimos un natural $x \geq 1$ tal que $2^x < p_q < 2^{x+1}$ entonces tenemos $2^{k_1}p_q^{\beta+1} = 2^{k_1}p_q^{k_q} > 2^{k_1+x}p_q^{\beta}$.

Definiendo $n' = \frac{n2^x p_q^{\beta}}{p_q^{k_q}}$, notar que $n' < n$, y usando que n es superabundante, cancelando términos tenemos lo siguiente

$$\frac{\sigma\left(p_q^{\beta}2^{k_1+x}\right)}{p_q^{\beta}2^{k_1+x}} < \frac{\sigma\left(p_q^{\beta+1}2^{k_1}\right)}{p_q^{\beta+1}2^{k_1}} \Leftrightarrow$$

$$p_q \frac{2^{k_1+x+1}-1}{2-1}\frac{p_q^{\beta+1}-1}{p_q-1} < 2^x \frac{2^{k_1+1}-1}{2-1}\frac{p_q^{\beta+2}-1}{p_q-1} \Leftrightarrow$$

$$(2^{k_1+x+1}-1)(p_q^{\beta+2}-p_q) < (2^{k_1+1+x}-2^x)(p_q^{\beta+2}-1) \Leftrightarrow$$

$$2^{k_1+x+1}p_q^{\beta+2} - 2^{k_1+x+1}p_q - p_q^{\beta+2} + p_q < 2^{k_1+x+1}p_q^{\beta+2} - 2^{k_1+1+x} - 2^x p_q^{\beta+2} + 2^x$$

Cancelando y reordenando términos obtenemos

$$(2^x-1)p_q^{\beta+2} + p_q < (p_q-1)2^{k_1+x+1} + 2^x$$

Por lo tanto,

$$(2^x-1)2^{k_1+2}p_q < (2^x-1)p_q^{k_q+1} < \left(p_q-1\right)2^{k_1+x+1} < p_q 2^{k_1+x+1} \Leftrightarrow$$

$$2^{k_1+2+x} - 2^{k_1+2} = (2^x-1)2^{k_1+2} < 2^{k_1+x+1} \Leftrightarrow$$

$$2.2^{k_1+x+1} - 2^{k_1+x+1} < 2^{k_1+2} \Leftrightarrow$$

$$2^{k_1+x+1} < 2^{k_1+2} \Leftrightarrow$$

$$2^x < 2^1$$

Lo cual es falso, entonces vale $p_q < 2^{k_1+2}$.

∎

Los siguientes lemas se encuentran en el artículo de G. Caveney, J.L. Nicolas y J. Sondow (Caveney, Nicolas, Sondow, 2011) bajo los nombres de SA1 y SA2, que son de suma importancia para el desarrollo del próximo capitulo. El siguiente lema (SA1) nos permite verificar que el Teorema de Grönwall es válido solo recorriendo los números superabundantes. Esto reafirma cualquier sospecha de que los números superabundantes, efectivamente están entre los números candidatos a contraejemplos para la desigualdad de Robin.

Lema 4.6 (SA1). Sea S el conjunto de todos los números superabundantes. Entonces tenemos

$$\limsup_{s \in S} G(s) = e^{\gamma}$$

Donde

$$G(s) = \frac{\sigma(s)}{s \log(\log(s))}$$

Demostración. Por ***Teorema 3.5 (Grönwall)*** sabemos que

$$\limsup_{n \to \infty} G(n) = e^{\gamma}$$

Por lo tanto, sabemos que

$$\limsup_{s \in S} G(s) \leq e^{\gamma}$$

Entonces es suficiente con construir una sucesión $\{s_k\}$ con $s_k \in S$ tal que

$$\limsup_{k \to \infty} G(s_k) \geq e^{\gamma}$$

Por el ***Teorema 3.5 (Grönwall)*** y por la definición de límite superior, existe una sucesión de números naturales $v_1 < v_2 < \cdots$ tal que $\lim_{k \to \infty} G(v_k) = e^{\gamma}$. Analizamos dos casos posibles, $v_k \in S$ o $v_k \notin S$.

Si $v_k \in S$ entonces tomamos $s_k = v_k$.

Si $v_k \notin S$, definimos $s_k = \max\{s \in S: s < v_k\}$, entonces podemos deducir que $\{s_k + 1, s_k + 2, \dots, v_k\} \cap S = \emptyset$. Como $s_k \in S$ obtenemos $\frac{\sigma(s_k)}{s_k} \geq \frac{\sigma(v_k)}{v_k}$, lo cual implica

$$G(s_k) = \frac{\sigma(s_k)}{s_k \log(\log(s_k))} > \frac{\sigma(v_k)}{v_k \log(\log(v_k))} = G(v_k)$$

Donde usamos que la función $\log(\log(x))$ es estrictamente creciente.

Sabemos que $\lim_{k\to\infty} v_k = \infty$ y por ***Corolario 2.2*** tenemos que $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$. Aplicando límite a ambos lados de la desigualdad anterior y por ***Proposición 2.26***

$$\limsup_{k\to\infty} G(s_k) \geq \limsup_{k\to\infty} G(v_k) = e^{\gamma}$$

Obteniendo la desigualdad complementaria.

■

El siguiente lema (SA2) nos muestra una característica importante sobre los números superabundantes. Dado cualquier número natural, existen finitos números superabundantes que no son múltiplos de ese número. Este resultado implica que, para un número superabundante suficientemente grande, hay ciertas restricciones para el exponente que tiene un dado primo de la factorización canónica. Es por eso que serán de gran importancia para la demostración del lema SA2, los resultados de Alaoglu y Erdös exhibidos al principio de este capítulo, ya que restringen mediante cotas los posibles exponentes de los primos de la factorización canónica de un número superabundante.

Lema 4.7 (SA2). Dado un $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces para cada $s \in S$ suficientemente grande s es múltiplo de n_0.

Demostración. Fijemos $n_0 > 1$. Sea K el exponente mas grande en la factorización prima de n_0 (sin importar repetidos) y definimos $P(n)$ el primo más grande de la factorización de n.

Veamos que el siguiente conjunto F es finito

$$F = \{s \in S: s\ no\ es\ divisible\ por\ P^K\} = \{s \in S: 0 \leq k_P(s) < K\}$$

Donde $k_P(s)$ es la potencia del primo P en la factorización de s.

Por ***Corolario 4.4*** tomando $p_{q'} = P$ y $k_{q'} = K$, sabemos que $k_2(s) < B$ para todo $s \in F$. Si q es cualquier factor primo de s entonces por ***Lema 4.1*** tenemos la misma cota para todas las potencias de los otros factores primos de s, es decir $k_q(s) < B$ y por ***Lema 4.5*** $q^{k_q} < 2^{B+2}$. En particular con $q = P(s)$ tenemos $P(s) \leq P(s)^{k_P} < 2^{B+2}$ como consecuencia obtenemos $p_1 p_2 \dots P(s) < 2^{B+2}!$, donde p_i son los factores primos de s menores que $P(s)$. Por último, acotando los exponentes tenemos

$s < (2^{B+2}!)^B$ para todo $s \in F$.

Notar que dado un n_0 fijo obtenemos un conjunto F correspondiente y finito.

Como F es un conjunto finito, y el conjunto S de los superabundantes es infinito ***Corolario 2.2*** entonces el complemento de F (F^c) es infinito.

Sea $s \in F^c$, entonces vale que $P^K|s$. Por ***Lema 4.1*** tenemos que $(p_1 p_2 \dots P)^K|s$ ya que los exponentes de $p_i < P$ en la descomposición prima de s cumplen que $k_i \geq K$. Notar que $n_0|(p_1 p_2 \dots P)^K$. Por propiedad transitiva de la divisibilidad tenemos finalmente que $n_0|s$, por lo tanto s es múltiplo de n_0.

■

El siguiente ejemplo expone la principal acotación construida en la demostración anterior. Se puede prever que la cota $p_1 p_2 \dots P(s) < 2^{B+2}!$, es exagerada en el sentido de que se intuye una distancia importante entre el lado derecho y el lado izquierdo. Esto es porque la demostración solo requería exponer la finitud del conjunto F. El siguiente ejemplo concreto exhibe esta característica.

Ejemplo. Tomando $n_0 = 81 = 3^4$, tenemos $P = 3$ y $K = 4$. Usando la ***Tabla 7.1*** del Anexo (capitulo 7) podemos contar la cantidad de números superabundantes que no tengan a 3^4 en su factorización canónica, entonces notamos que $\#F \geq 81$ y que el número superabundante más grande de ellos es

$$2^7 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37$$
$$= 149602080797769000 = 1{,}49602080797769 \times 10^{17}$$

Por otro lado, buscamos la cota del ***Corolario 4.4***

$$B = (k_{q'} + 2)\frac{\log(p_{q'})}{\log(2)} = (4 + 2)\frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 9.51$$

Calculando la cota del ***Lema 4.7*** obtenemos

$$(2^{B+2}!)^B \approx (2^{11.51}!)^{9.51} \approx 2{,}20822 \dots \times 10^{84074}$$

Como resultado podemos notar por ***Lema 4.7*** que

$$1{,}49602080797769 \times 10^{17} \leq \max(F) < 2{,}20822 \dots \times 10^{84074}$$

Si bien el número superabundante que encontramos en nuestro ejemplo es muy grande, el máximo del conjunto F podría ser varios ordenes de magnitud, dada la cota que se obtuvo por el ***Lema 4.7***.

5 – Números extraordinarios

En este capítulo, analizaremos el teorema principal del artículo titulado *"Robin's Theorem, Primes, and a New Elementary Reformulation of the Riemann Hypothesis"* escrito por Geoffrey Caveney, Jean-Louis Nicolas y Jonathan Sondow (Caveney, Nicolas, Sondow, 2011). Para ello presentamos un nuevo concepto, el de número extraordinario, y demostramos el teorema más importante: la hipótesis de Riemann es verdadera si y solo si 4 es el único número extraordinario. Para demostrarlo, utilizamos los teoremas relacionados con los números superabundantes que se presentaron en capítulos anteriores, así como lemas adicionales. Serán de gran importancia el Teorema de Grönwall ***(Teorema 3.5)*** y la desigualdad de Robin ***(Teorema 3.2)***.

Con esta nueva equivalencia, podemos deshacernos de una cota fija de la desigualdad de Robin para la función suma de divisores y poner en el centro la función $G(n) = \sigma(n)/n \, log \; log(n)$. Se analizan para cada n cuales son sus divisores y sus múltiplos y a partir de ellos comprobar la propiedad de ser extraordinario.

Comenzamos definiendo los números extraordinarios y sus características.

Definición 5.1. Un número natural n es extraordinario si n es compuesto y satisface las siguientes dos propiedades

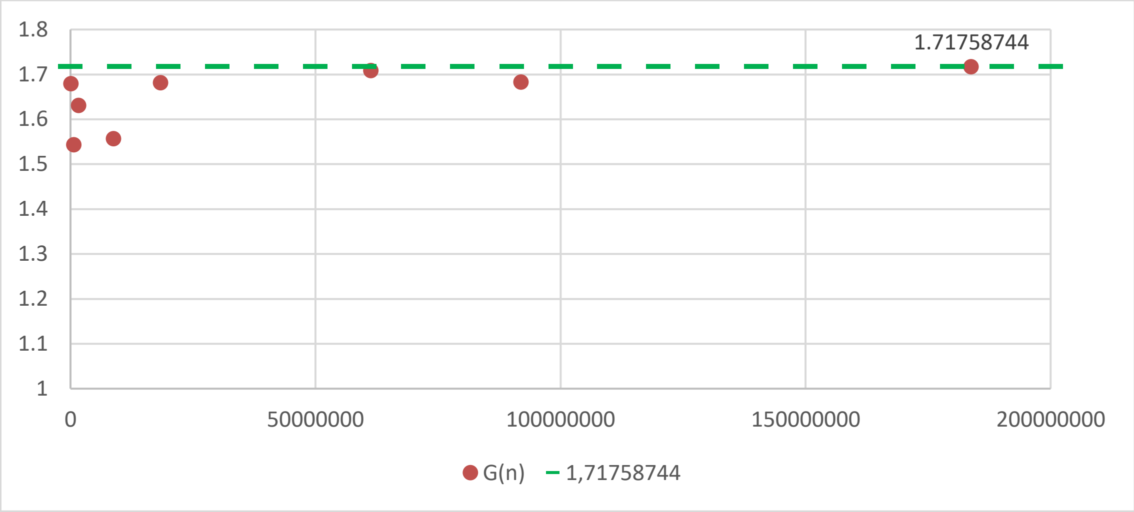
- GA1: $G(n) \geq G(n/p)$ para todos los factores primos p de N.
- GA2: $G(n) \geq G(an)$ para todos los múltiplos an de n.

Las dos condiciones para ser número extraordinario, las condiciones GA1 y GA2, tienen una diferencia importante. Para verificar la condición GA2 se requiere que infinitos números cumplan con la desigualdad $G(n) \geq G(a.n)$. Pero para que se cumpla la condición GA1 se requiere de finitos números, relacionados con los factores primos de n. Si tomamos por ejemplo $n = 183783600 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$ se puede verificar que es GA1, (ver tabla y gráfico a continuación), es decir, vale que $G(n) \geq G\left(\frac{n}{p}\right)$ para $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$. Este número no es extraordinario, ya que no es GA2, porque $G(n) \approx 1{,}71 < G(19n) \approx 1{,}72$. En general, verificar si un número es extraordinario o no, se dificulta a medida que el número es más grande, ya que al contener más divisores primos, los algoritmos se tomarían más tiempo para comprobar si es GA1. Adicionalmente, verificar que un número efectivamente es GA2, se convierte en una tarea bastante difícil, principalmente porque, al necesitar verificar infinitos números, solo se podría demostrar la propiedad teóricamente, como lo haremos para el caso mencionado del número 4.

A continuación, se muestran los valores de $G(n)$ y $G\left(\frac{n}{p}\right)$ para $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$

Primo	n/p	$\sigma(n)$	$G(n)$
1	183783600	929940480	1,71758744
2	91891800	449971200	1,68338401
3	61261200	302230656	1,70914794
5	18378360	87091200	1,68220862
7	8751600	37778832	1,55748917
11	1670760	7257600	1,631649
13	673200	2698488	1,54365204
17	98280	403200	1,68002765

Tanto en la tabla como en el siguiente gráfico se puede observar que $G(n) \geq G\left(\frac{n}{p}\right)$ para $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$.



El siguiente teorema verifica que efectivamente, 4 es un número extraordinario, es decir que cumple con las propiedades GA1 y GA2.

Teorema 5.2. El menor de los números extraordinarios es $N = 4$.

Demostración. Observemos primero que $N < 4$ no pueden ser extraordinarios por no ser compuestos. Veamos que $N = 4$ cumple con las propiedades GA1 y GA2. Calculando obtenemos $G(4) = 5.357 \ldots$ y cómo el único factor primo de 4 es 2 veamos que $G(4) \geq G(4/2) = G(2) = \frac{\sigma(2)}{2 \log(\log 2)} = -4.09263$ cumpliendo GA1.

Para GA2 utilizaremos la desigualdad de Robin del ***Teorema 3.4*** dada por

$$G(n) < e^{\gamma} + \frac{0.6483}{(\log(\log n))^2},$$

notar que el lado derecho de la desigualdad es una función decreciente.

Entonces para $n \geq 5$ tenemos que

$$G(n) < e^{\gamma} + \frac{0.6483}{(\log(\log 5))^2} = 4.643 \ldots < G(4) = 5.357 \ldots$$

Dado que la cota vale para todo $n \geq 5$, particular también vale para los múltiplos de $N = 4$ cumpliendo de esta manera GA2.

∎

El siguiente lema nos permite mostrar que el teorema de Grönwall ***(Teorema 3.5)*** es también valido fijando un número natural y solo recorriendo los múltiplos de ese número. Además, caracteriza fuertemente los números de tipo GA2, estos cumplirán que $G(n) \geq e^{\gamma}$, es decir, no cumplen con la desigualdad de Robin, por lo que resultará extremadamente difícil hallar un número mayor a 5040 y que sea GA2, ya que esto implica la falsedad de la hipótesis de Riemann.

Lema 5.3. Dado $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $\limsup_{n\to\infty} G(n_0 n) = e^{\gamma}$. Sí n cumple GA2, entonces $G(n) \geq e^{\gamma}$.

Demostración. Para la primera parte observemos que por teorema de Grönwall ***(Teorema 3.5)*** tenemos $\limsup_{n\to\infty} G(n_0 n) \leq e^{\gamma}$. Por otro lado, por el ***Lema 4.6*** tenemos $\limsup_{s\in S} G(s) = e^{\gamma}$ y por ***Lema 4.7*** para cada $s \in S$ suficientemente grande, s es múltiplo de n_0. Entonces, $\limsup_{n\to\infty} G(n_0 n) \geq e^{\gamma}$ por lo tanto $\limsup_{n\to\infty} G(n_0 n) = e^{\gamma}$.

Para la segunda parte, como n cumple GA2 vale $G(n_0 n) \leq G(n)$, por lo tanto $G(n)$ es una cota superior para todos sus múltiplos y vale que $e^{\gamma} = \limsup_{n\to\infty} G(n_0 n) \leq G(n)$.

■

Los siguientes lemas involucran a los contraejemplos para la desigualdad de Robin para $\mathrm{n} \leq 5040$.

Lema 5.4. Sea R definido por el conjunto $R = \{r \leq 5040 : G(r) \geq e^{\gamma}\}$. Si $r \in R, r > 5$, entonces $G(r) < G(r/p)$, para algún factor primo p de r.

Demostración. Los números $r \in R$ y los valores $G(r)$ están calculados en la ***Tabla 5.5***. Asumiendo $G(r) < G(r/p)$ para algún factor primo p de r, definimos el primo mas chico que cumple con $G(r) < G(r/p)$ como

$$p(r) = \min \{p|r : G(r/p) > G(r)\}$$

En la tabla se puede observar que para todo $5 < r \in R$ existe un $p(r)$ y por lo tanto cumplen que $G(r) < G(r/p)$.

■

Tabla 5.5

r	SA	$\sigma(r)$	$\sigma(r)/r$	$G(r)$	$p(r)$	$G(11r)$
3		4	1,333333	14,17718		1,161996
4	X	7	1,75	5,357674		1,43451
5		6	1,2	2,521618		0,943063
6	X	12	2	3,429367	2	1,522958
8		15	1,875	2,561128	2	1,36452
9		13	1,444444	1,834926	3	1,033287
10		18	1,8	2,158189	2	1,268774
12	X	28	2,333333	2,56344	2	1,605237

16		31	1,9375	1,899917	2	1,286476
18		39	2,166667	2,041358	3	1,419183
20		42	2,1	1,913983	2	1,359414
24	X	60	2,5	2,162127	2	1,587042
30		72	2,4	1,96058	3	1,489549
36	X	91	2,527778	1,980481	2	1,541702
48	X	124	2,583333	1,908541	2	1,535265
60	X	168	2,8	1,98637	5	1,632916
72		195	2,708333	1,863737	2	1,556414
84		224	2,666667	1,791412	7	1,514256
120	X	360	3	1,915701	2	1,659556
180	X	546	3,033333	1,841393	3	1,632552
240	X	744	3,1	1,82222	2	1,638365
360	X	1170	3,25	1,833471	2	1,676872
720	X	2418	3,358333	1,78263	2	1,669324
840	X	2880	3,428571	1,797812	7	1,691118
2520	X	9360	3,714286	1,804611	7	1,742537
5040	X	19344	3,838095	1,790973	2	1,751247

Lema 5.6. Si $r \in R$ y $p \geq 11$ es primo, entonces $G(pr) < e^{\gamma}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, y sean p, q primos impares que no dividen a n y $p > q$. Entonces

$$G(pn) = \frac{\sigma(pn)}{pn\log(\log(pn))} = \frac{p+1}{p}\frac{\sigma(n)}{n\log(\log(pn))} < \frac{q+1}{q}\frac{\sigma(n)}{n\log(\log(qn))} = G(qn)$$

Por otro lado, en la ***Tabla 5.5*** podemos observar que ningún número primo $p \geq 11$ divide a $r \in R$ y $G(11r) < 1{,}76$ para todo $r \in R$. Cómo $1{,}76 < e^{\gamma} \approx 1{,}78$, tenemos entonces $G(pr) \leq G(11r) < e^{\gamma}$.

■

Finalmente, utilizando todos los lemas de este capítulo, y resultados de capítulos anteriores podemos demostrar el resultado principal de la tesis, la equivalencia que involucra la hipótesis de Riemann y los números extraordinarios.

Teorema 5.7. La hipótesis de Riemann es verdadera si y solo si 4 es el único número extraordinario.

Demostración. Demostremos primero que si existe un $N \neq 4$ extraordinario entonces la hipótesis de Riemann es falsa.

Asumimos que $N \neq 4$ es un número extraordinario, por lo tanto, cumple GA1 y GA2. Entonces por ***Lema 5.3*** vale $G(N) \geq e^{\gamma}$. Notemos que si $N \leq 5040$ entonces $N \in R$ definido en el ***Lema 5.4***.

Además, como $N \neq 4$ es compuesto se deduce que $N > 5$. Usando el ***Lema 5.4*** tenemos que $G(N) < G(N/p)$, para algún factor primo p de N, entonces N no es GA1 para $N \leq 5040$. Como $N > 5040$ y por la desigualdad de Robin del ***Teorema 3.2*** la hipótesis de Riemann es falsa.

Por otro lado, supongamos que, si la hipótesis de Riemann es falsa, entonces existe $N \neq 4$ extraordinario. Por ***Teorema 3.2 (Robin)*** *y* ***Teorema 3.5 (Grönwall)*** existe un máximo

$$M = \max\{G(n): n > 5040\} \qquad (1)$$

y $M \geq e^{\gamma}$. Definamos

$$N = \min\{n > 5040: G(n) = M\} \qquad (2)$$

Ahora demostremos que N es un número extraordinario para lo cual primero veamos que es compuesto. Si N fuera primo entonces $\sigma(N) = 1 + N$ y si $N > 5040$ tenemos que

$$G(N) = \frac{1+N}{N\log(\log(N))}$$

Notemos que $G(N)$ es una función decreciente para cualquier N, en particular para $N > 5040$ tenemos un máximo en 5040 es decir $G(N) < \frac{5041}{5040\log(\log(5040))} \approx 0.46\ldots$ contradiciendo $G(N) \geq e^{\gamma} \approx 1.78\ldots$

Notar que como M es un máximo, $G(N) \geq G(n)$ para todo $n \geq N$ y por lo tanto N es GA2.

Para verificar que N cumple GA1 definimos p primo tal que $p|N$ y $r = N/p$. En el caso donde $r > 5040$, como $r < N$ implica $G(N) > G(r)$, donde la desigualdad es estricta ya que $G(N)$ es el menor de los máximos. Ahora consideremos el caso donde $r \leq 5040$.

Haciendo los cálculos podemos verificar que $G(n) < e^{\gamma}$ si $5041 \leq n \leq 35280$. Si $N = 35280 = 7 \times 5040$ por lo tanto para los primos $p \leq 7$ tenemos que $r = \frac{N}{p} \geq 5040$ y $G(r) < e^{\gamma}$. Veamos que ocurre para $p \geq 11$.

Supongamos que $G(r) \geq e^{\gamma}$, entonces $r \in R$. Por lo tanto, por ***Lema 5.6*** tenemos $e^{\gamma} > G(pr) = G(N)$ contradiciendo que $G(N) \geq e^{\gamma}$. Por lo tanto $G(r) < e^{\gamma} \leq G(N)$.

En ambos casos $G(N) > G(r) = G\left(\frac{N}{p}\right)$ y esto implica que N es GA1.

Por lo tanto $N \neq 4$ es extraordinario.

■

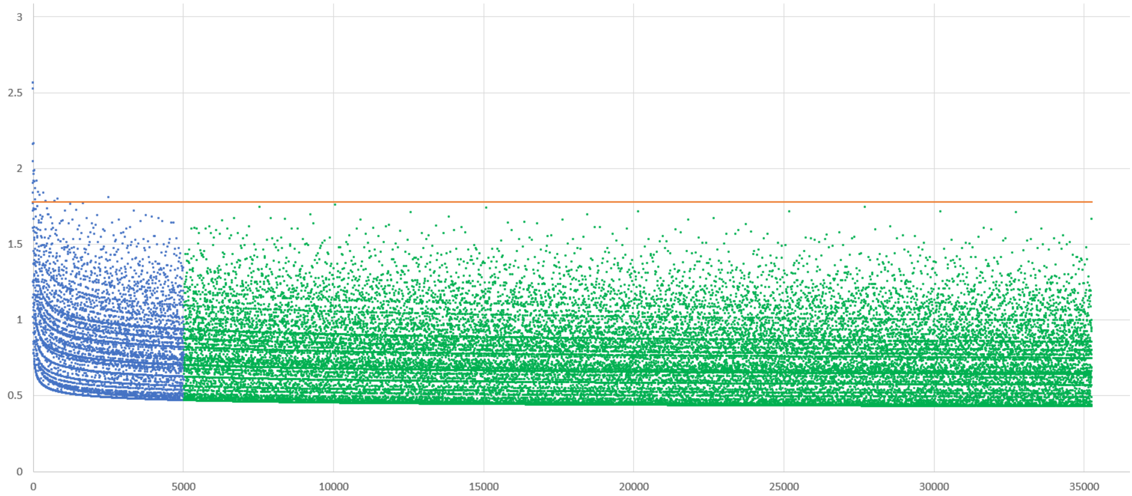


Gráfico de $G(n)$, $5 \leq n \leq 35280$

En el grafico podemos observar en color azul los valores de $G(n \leq 5040)$, en verde los valores para $G(n \geq 5041)$ y en naranja la recta $y = e^{\gamma}$.

Notar que para valores de $G(n)$, $5041 \leq n \leq 35280$ ninguno está por encima de e^{γ}

Observación 5.8. De la demostración del teorema anterior se deduce que si existe un contraejemplo de la desigualdad de Robin del ***Teorema 3.2*** entonces el máximo $M = \max\{G(n): n > 5040\}$ existe y el menor $N > 5040$ tal que $G(N) = M$ es extraordinario.

Observación 5.9. La demostración del ***Teorema 5.7*** utiliza la condición GA1 con la desigualdad estricta, es decir $G(n) > G\left(\frac{n}{p}\right)$. Evidentemente esto se puede utilizar para el N mínimo que cumple que $G(N) = M$.

Queda la pregunta de si se pudiera cambiar la condición GA1 para cualquier otro caso. En particular, si existiera otro máximo, $N' > N$ tal que $G(N) = G(N')$ podría no cumplirse la condición en caso de que $N' = Np$ tendríamos $G(N') = G\left(\frac{N'}{p}\right)$.

Mas generalmente podemos preguntarnos si existe la posibilidad de que $G(m) = G(n)$ para cualquier $n < m$. Para esto debe cumplirse que $\frac{G(m)}{G(n)} = 1$. Pero veamos que:

$$\frac{G(m)}{G(n)} = \frac{\sigma(m)\, n\, loglog(n)}{\sigma(n)\, m\, loglog(m)}$$

El cociente,

$$\frac{\sigma(m)\, n}{\sigma(n)\, m}$$

es un número racional, ya que $\sigma(n)$ siempre es un número natural. Si el cociente $\frac{loglog(n)}{loglog(m)}$ fuera un número irracional, sería suficiente para que $\frac{\sigma(m)\, n\, loglog(n)}{\sigma(n)\, m\, loglog(m)} \neq 1$. Desafortunadamente, no es sencillo demostrar que $\frac{loglog(n)}{loglog(m)}$ es irracional. De hecho, se sabe que, si se demuestra un resultado de la teoría de números trascendentes, la conjetura de Schanuel (Lang, 1966), entonces el cociente $\frac{loglog(n)}{loglog(m)}$ es un número trascendente y por lo tanto irracional. Es realmente notable como la hipótesis de Riemann pueda estar conectada también con otras conjeturas de gran importancia.

6 - Conclusión

En conclusión, la Hipótesis de Riemann puede ser reformulada en términos de los números extraordinarios. Esta reformulación es atractiva porque no involucra la constante γ, y no tenemos la restricción de una cota como en la desigualdad de Robin, la hipótesis depende de que el único número extraordinario sea el 4.

La reformulación de la Hipótesis de Riemann ofrece un enfoque elegante y elemental para abordar esta importante cuestión matemática. Además, ofrece una serie de herramientas y teoremas que pueden ser utilizados para demostrar la veracidad de la hipótesis o su falsedad. Este enfoque nos permite entender la hipótesis de Riemann en términos de la distribución de divisores de un número dado y su suma.

En general, estos resultados son un importante avance en el estudio de la Hipótesis de Riemann y proporcionan una nueva perspectiva para abordar esta compleja cuestión matemática. La hipótesis de Riemann es uno de los resultados con más equivalencias, y cada equivalencia puede ser una mejor oportunidad para entender y resolver este problema tan famoso.

7 - Anexo

Tabla 7.1. Tabla de los primeros 108 números superabundantes y su correspondiente factorización prima. Extracto de la tabla (Sloane, 2010). Se pueden apreciar los resultados de Alaoglu y Erdös, las características de los números superabundantes demostradas en el capítulo 4 con respecto a la factorización canónica y los exponentes de cada factor primo. Todos los números superabundantes contienen primos consecutivos, los exponentes se distribuyen de forma decreciente, y el último exponente siempre es 1.

En relación al ***Lema 4.7*** (SA2) se puede observar que puede haber ciertas diferencias entre números superabundantes consecutivos. Si un primo en particular tiene un exponente determinado, el numero superabundante siguiente puede tener un exponente menor, pero tener más primos en su descomposición prima como ocurre con el número superabundante 49 (1102701600) que contiene en su factorización prima a 3^4 pero su último primo es 17, mientras que el número superabundante 50 (1163962800), contiene en su factorización prima a 3^2 pero su último primo es 19.

N	SA	Factorización
1	1	1^1
2	2	2^1
3	4	2^2
4	6	$2^1 . 3^1$
5	12	$2^2 . 3^1$
6	24	$2^3 . 3^1$
7	36	$2^2 . 3^2$
8	48	$2^4 . 3^1$
9	60	$2^2 . 3^1 . 5^1$
10	120	$2^3 . 3^1 . 5^1$
11	180	$2^2 . 3^2 . 5^1$
12	240	$2^4 . 3^1 . 5^1$
13	360	$2^3 . 3^2 . 5^1$
14	720	$2^4 . 3^2 . 5^1$
15	840	$2^3 . 3^1 . 5^1 . 7^1$
16	1260	$2^2 . 3^2 . 5^1 . 7^1$
17	1680	$2^4 . 3^1 . 5^1 . 7^1$
18	2520	$2^3 . 3^2 . 5^1 . 7^1$
19	5040	$2^4 . 3^2 . 5^1 . 7^1$
20	10080	$2^5 . 3^2 . 5^1 . 7^1$
21	15120	$2^4 . 3^3 . 5^1 . 7^1$

22	25200	$2^4 . 3^2 . 5^2 . 7^1$
23	27720	$2^3 . 3^2 . 5^1 . 7^1 . 11^1$
24	55440	$2^4 . 3^2 . 5^1 . 7^1 . 11^1$
25	110880	$2^5 . 3^2 . 5^1 . 7^1 . 11^1$
26	166320	$2^4 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1$
27	277200	$2^4 . 3^2 . 5^2 . 7^1 . 11^1$
28	332640	$2^5 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1$
29	554400	$2^5 . 3^2 . 5^2 . 7^1 . 11^1$
30	665280	$2^6 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1$
31	720720	$2^4 . 3^2 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1$
32	1441440	$2^5 . 3^2 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1$
33	2162160	$2^4 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1$
34	3603600	$2^4 . 3^2 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1$
35	4324320	$2^5 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1$
36	7207200	$2^5 . 3^2 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1$
37	8648640	$2^6 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1$
38	10810800	$2^4 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1$
39	21621600	$2^5 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1$
40	36756720	$2^4 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1$
41	61261200	$2^4 . 3^2 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1$
42	73513440	$2^5 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1$
43	122522400	$2^5 . 3^2 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1$
44	147026880	$2^6 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1$
45	183783600	$2^4 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1$
46	367567200	$2^5 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1$
47	698377680	$2^4 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
48	735134400	$2^6 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1$
49	1102701600	$2^5 . 3^4 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1$
50	1163962800	$2^4 . 3^2 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
51	1396755360	$2^5 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
52	2327925600	$2^5 . 3^2 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
53	2793510720	$2^6 . 3^3 . 5^1 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
54	3491888400	$2^4 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
55	6983776800	$2^5 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
56	13967553600	$2^6 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
57	20951330400	$2^5 . 3^4 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
58	27935107200	$2^7 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
59	41902660800	$2^6 . 3^4 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
60	48886437600	$2^5 . 3^3 . 5^2 . 7^2 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1$
61	80313433200	$2^4 . 3^3 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1 . 23^1$

62	160626866400	$2^5.3^3.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1$
63	321253732800	$2^6.3^3.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1$
64	481880599200	$2^5.3^4.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1$
65	642507465600	$2^7.3^3.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1$
66	963761198400	$2^6.3^4.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1$
67	1124388064800	$2^5.3^3.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1$
68	1927522396800	$2^7.3^4.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1$
69	2248776129600	$2^6.3^3.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1$
70	3373164194400	$2^5.3^4.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1$
71	4497552259200	$2^7.3^3.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1$
72	4658179125600	$2^5.3^3.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1$
73	6746328388800	$2^6.3^4.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1$
74	9316358251200	$2^6.3^3.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1$
75	13974537376800	$2^5.3^4.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1$
76	18632716502400	$2^7.3^3.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1$
77	27949074753600	$2^6.3^4.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1$
78	32607253879200	$2^5.3^3.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1$
79	55898149507200	$2^7.3^4.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1$
80	65214507758400	$2^6.3^3.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1$
81	97821761637600	$2^5.3^4.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1$
82	130429015516800	$2^7.3^3.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1$
83	144403552893600	$2^5.3^3.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
84	195643523275200	$2^6.3^4.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1$
85	288807105787200	$2^6.3^3.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
86	433210658680800	$2^5.3^4.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
87	577614211574400	$2^7.3^3.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
88	866421317361600	$2^6.3^4.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
89	1010824870255200	$2^5.3^3.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
90	1732842634723200	$2^7.3^4.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
91	2021649740510400	$2^6.3^3.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
92	3032474610765600	$2^5.3^4.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
93	4043299481020800	$2^7.3^3.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
94	6064949221531200	$2^6.3^4.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
95	10685862914126400	$2^6.3^3.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1.37^1$
96	12129898443062400	$2^7.3^4.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
97	21371725828252800	$2^7.3^3.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1.37^1$
98	24259796886124800	$2^8.3^4.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
99	30324746107656000	$2^6.3^4.5^3.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1$
100	32057588742379200	$2^6.3^4.5^2.7^1.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1.37^1$
101	37400520199442400	$2^5.3^3.5^2.7^2.11^1.13^1.17^1.19^1.23^1.29^1.31^1.37^1$

102	64115177484758400	$2^7 . 3^4 . 5^2 . 7^1 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1 . 23^1 . 29^1 . 31^1 . 37^1$
103	74801040398884800	$2^6 . 3^3 . 5^2 . 7^2 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1 . 23^1 . 29^1 . 31^1 . 37^1$
104	112201560598327000	$2^5 . 3^4 . 5^2 . 7^2 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1 . 23^1 . 29^1 . 31^1 . 37^1$
105	149602080797769000	$2^7 . 3^3 . 5^2 . 7^2 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1 . 23^1 . 29^1 . 31^1 . 37^1$
106	224403121196654000	$2^6 . 3^4 . 5^2 . 7^2 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1 . 23^1 . 29^1 . 31^1 . 37^1$
107	448806242393308000	$2^7 . 3^4 . 5^2 . 7^2 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1 . 23^1 . 29^1 . 31^1 . 37^1$
108	897612484786617000	$2^8 . 3^4 . 5^2 . 7^2 . 11^1 . 13^1 . 17^1 . 19^1 . 23^1 . 29^1 . 31^1 . 37^1$

8 - Bibliografía

Akbary, A. y Friggstad Z. (2009). Superabundant numbers and the Riemann hypothesis. Amer. Math. Monthly, 116, 273-275.

Alaoglu, L. y Erdös, P. (1944). On highly composite and similar numbers. Trans. Amer. Math. Soc. 56, 448–469.

Apéry, R. (1979). Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. Astérisque, 61, 11–13.

Arfken, G. (1970). Mathematical methods for physicists. Academic Press.

Bombieri, E. (2014). The Riemann Hypothesis – official problem description. Clay Mathematics Institute.

Briggs, K. (2006). Abundant numbers and the Riemann Hypothesis. Experimental Math., 16, 251-256.

Broughan, K. (2017). Equivalents of the Riemann Hypothesis Volume One: Arithmetic Equivalents. Cambridge University Press.

Burdette, T. y Stewart I. (2020). Counterexamples to a Conjecture by Alaoglu and Erdos. arXiv:2009.03306.

Caveney, G., Nicolas, J. L., y Sondow, J. (2011). Robin's Theorem, Primes, and a new elementary reformulation of the Riemann Hypothesis. Integers, 11(6), 753-763.

Edwards, H. M. (1974). Riemann's zeta function. Academic press.

Gronwall, T. H. (1913). Some asymptotic expressions in the theory of numbers. Trans. Amer. Math. Soc. 14, 113–122.

Haible, B. y Papanikolaou, T. (1998). Fast multiprecision evaluation of series of rational numbers. Algorithmic Number Theory. Lecture Notes in Computer Science. Springer. 1423, 338–350.

Laatsch, R. (1986). Measuring the abundancy of integers. Mathematics Magazine, 59(2), 84-92.

Lagarias, J. C. (2002). An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis. Amer. Math. Monthly 109, 534–543.

Lang, S. (1966). Introduction to Transcendental Numbers. Addison–Wesley, 30-31.

Ramanujan, S., Nicolas, J.L. y Robin, G. (1997). Highly composite numbers. Ramanujan J. 1, 119–153.

Robin, G. (1984). Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann. J. Math. Pures Appl. 63, 187–213.

Riemann, B. (1859). On the number of primes less than a given magnitude. Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Sloane, N. J. A. (2010). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Publicado en http://oeis.org.

Rivoal, T. (2000). "La fonction zeta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs". Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série I. 331 (4): 267–270.

Zudilin, W. (2001). One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational. Russ. Math. Surv. 56 (4).