UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA
Facultad de Tecnología Informática

Carrera: Profesorado Universitario en Matemática

Las Matemáticas en Egipto y en Mesopotamia

Autora: Myriam Gentilezza
Directora: Dra. Samira Abdel Masih
Co-Directora: Dra. Cristina Camós

**TRABAJO FINAL PRESENTADO PARA OPTAR
AL TÍTULO DE
PROFESORA UNIVERSITARIA EN MATEMÁTICA**

- Marzo de 2021 –

Resumen

La Matemática es una de las formas más abstractas de la creación intelectual. Su aprendizaje requiere tiempo, dedicación y esfuerzo. Y para los que hacemos de ella una profesión, exige además mucha pasión. Pero ¿cómo y por qué surgió la Matemática? ¿Cuál fue el factor histórico que motivó a crear y desarrollar esta ciencia? ¿Cómo se enseñaba inicialmente la Matemática? ¿Qué metodología empleaban? ¿Se asemejaba a la metodología actual?

En este Trabajo Final trataremos de responder a estos interrogantes, y para ello analizaremos la publicación presentada por James Ritter, citada en la Referencia [1].

En dicha publicación se estudian los primeros testimonios directos que se disponen de una actividad matemática: los de Mesopotamia y los del Antiguo Egipto. Veremos cómo surgió allí esta ciencia, qué sistema de numeración empleaban y examinaremos textos que muestran de qué manera estos pueblos resolvían ciertos problemas matemáticos.

Para facilitar la comprensión de este tema, en los dos primeros capítulos describimos, a manera introductoria, cómo nacieron los primeros números y quiénes eran los encargados de ejecutar las cuentas y de enseñar las nociones matemáticas adquiridas.

Por otro lado, en este trabajo que presentamos nos hemos propuesto también un desafío: el de explicar, mediante un lenguaje sencillo y accesible para todos, cómo eran los primeros conocimientos y prácticas matemáticas.

Palabras claves:

Los primeros números. Matemática en Egipto, Matemática en Mesopotamia, Sistema Sexagesimal, Sistema de Numeración Egipcio.

Índice General

RESUMEN **2**

EL PRELUDIO DE LA MATEMÁTICA: LA NECESIDAD DE CONTAR **6**

EL ORIGEN DE LOS PRIMEROS NÚMEROS **8**

Mesopotamia, cuna de los números 9
Ejemplo 1.1 ..... *10*
Ejemplo 1.2 ..... *11*
¿Cómo eran en Mesopotamia los primeros documentos escritos? 12
El primer recibo de compra-venta de la historia 12
Ejemplo 1.3 ..... *12*
Los primeros documentos escritos 13
Ejemplo 1.4 ..... *14*
Un paso más en el camino de la escritura 14
Ejemplo 1.5 ..... *16*
Ejemplo 1.6 ..... *17*
Ejemplo 1.7 ..... *18*
La invención de la escritura cuneiforme 19
Mientras tanto, ¿qué ocurría en Egipto? 20
La aparición en Egipto de los primeros números 20
Ejemplo 1.8 ..... *21*
Ejemplo 1.9 ..... *21*
Las escrituras jeroglífica y hierática 23

LOS ESCRIBAS, ANTECESORES DE LOS MATEMÁTICOS **24**

Las primeras escuelas 24
La vida cotidiana en las escuelas mesopotámicas 26
Los escribas, egresados de las primeras escuelas 26
"Matemático", una palabra desconocida en la antigüedad 27

LA ARITMÉTICA EN EGIPTO **28**

Cómo se efectuaban las operaciones aritméticas en el Antiguo Egipto 28
El Sistema de Numeración Egipcio 29
Ejemplo 3.1 ..... *29*
Ejemplo 3.2 ..... *30*
Los símbolos de suma y resta 30
Ejemplo 3.3 ..... *30*
La Multiplicación en el Sistema Egipcio 32
Ejemplo 3.4 ..... *32*
Ejemplo 3.5 ..... *33*
Proposición 3.6: Justificación del Algoritmo egipcio de multiplicación 34
Un caso especial de multiplicación: la decuplicación y centuplicación 35
Ejemplo 3.7 ..... *35*
La División en el Sistema Egipcio 36
Ejemplo 3.8 ..... *36*
Ejemplo 3.9 ..... *37*
Teorema 3.10: Algoritmo de la División Entera 37
Proposición 3.11: Justificación del Algoritmo egipcio de la división 38

LAS FRACCIONES EGIPCIAS **40**

Notación 3.12 41
Ejemplo 3.13 ..... *41*
Ejemplo 3.14 ..... *42*
Propiedad 3.15: Reglas egipcias para operar con fracciones 44
Ejemplo 3.16 ..... *44*
Ejemplo 3.17 ..... *46*
Cómo descomponían los egipcios una fracción propia en fracciones unitarias 47

Ejemplo 3.18 ..... *48*
NOTA ILUSTRATIVA 49
LA TABLA 2/N DEL PAPIRO DE RHIND 50
Ejemplo 3.19 ..... *51*
LA TABLA DE MULTIPLICACIÓN DE 2/3 DEL PAPIRO DE RHIND 52
PRINCIPALES TÉCNICAS APLICADAS POR LOS ESCRIBAS PARA OPERAR CON FRACCIONES 52
1. Desdecuplicación *52*
Ejemplo 3.20 ..... *52*
2. Descentuplicación *53*
3. Desduplicación *53*
Ejemplo 3.21 ..... *54*
4. Desduplicaciones sucesivas *54*
5. Desduplicar y Desdecuplicar *54*
6. La Técnica 2/3 ..... *55*
Ejemplo 3.22 ..... *55*
Ejemplo 3.23 ..... *56*
Ejemplo 3.24 ..... *57*
NOTA ILUSTRATIVA: ¿EXISTÍA EL CERO EN EL ANTIGUO EGIPTO? 60

LA ARITMÉTICA EN MESOPOTAMIA 61

EL SISTEMA SEXAGESIMAL BABILÓNICO 62
Ejemplo 4.1 ..... *63*
NOTACIÓN 4.2 63
Ejemplo 4.3 ..... *63*
Ejemplo 4.4 ..... *64*
LA SUMA EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL BABILÓNICO 65
Ejemplo 4.5 ..... *65*
LA RESTA EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL BABILÓNICO 66
Ejemplo 4.6 ..... *66*
LA MULTIPLICACIÓN EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL BABILÓNICO 67
Ejemplo 4.7 ..... *68*
Ejemplo 4.8 ..... *69*
Ejemplo 4.9 ..... *71*
LAS TABLAS DE CUADRADOS 72
LAS FRACCIONES EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL BABILÓNICO 73
OBSERVACIÓN 4.10 73
Ejemplo 4.11 ..... *73*
PROPIEDAD 4.12 74
Ejemplo 4.13 ..... *74*
LAS FRACCIONES RECÍPROCAS 76
Ejemplo 4.14 ..... *77*
Ejemplo 4.15 ..... *78*
LA TABLA DE RECÍPROCOS 79
LA DIVISIÓN EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL BABILÓNICO 80
Ejemplo 4.16 ..... *80*

RESOLUCIÓN DE LOS PRIMEROS PROBLEMAS MATEMÁTICOS 82

ALGUNAS UNIDADES DE MEDIDA DEL ANTIGUO EGIPTO 82
ALGUNAS UNIDADES DE MEDIDA DE LA ANTIGUA MESOPOTAMIA 83
EL PROBLEMA DE LOS DOS GRANEROS 83
5.1 ANÁLISIS DEL TEXTO EGIPCIO 85
OBSERVACIÓN 5.1 88
ANÁLISIS DEL TEXTO EGIPCIO: CASO GENERAL 88
RELACIÓN ENTRE LA FÓRMULA EGIPCIA DEL ÁREA DE UN CÍRCULO Y LA CONOCIDA ACTUALMENTE 89
¿CONOCÍAN LOS EGIPCIOS EL NÚMERO π? 90
EL MISMO PROBLEMA, CON OTROS DATOS 90
PRIMERA TABLA: CÁLCULO DEL PRIMER TÉRMINO 95
SEGUNDA TABLA: CÁLCULO DEL SEGUNDO TÉRMINO 95
TERCERA TABLA: CÁLCULO DEL TERCER TÉRMINO 96

Cuarta Tabla: cálculo del cuarto término....97
5.2 Análisis del texto babilónico 100
Fórmulas que aplicaban en Mesopotamia para hallar el volumen de un granero....100
Análisis del algoritmo empleado en el texto babilónico 101
Análisis del algoritmo babilónico: Caso general 103
Un balance sobre la metodología empleada por ambas civilizaciones....104
CONCLUSIÓN....106
REFERENCIAS 107

Introducción

El preludio de la Matemática: la necesidad de contar

No cabe duda que los números constituyen la herramienta indispensable de la Matemática. Aunque se carece de información precisa acerca del momento en que el hombre primitivo empezó a valerse de un sistema numérico, tuvo muchas razones y situaciones cotidianas que lo impulsaron a tratar de cuantificar todo lo que lo rodeaba. Así por ejemplo, en su etapa sedentaria se vio forzado a emplear algún método de conteo, ya sea para saber cuántas cabezas de ganado u ovejas poseía, como también para conocer las reservas de alimentos que disponía. También aquellos que mantenían relaciones hostiles con sus vecinos, al término de cada expedición militar debían preocuparse por saber si seguían teniendo la misma cantidad de soldados.

En la etapa previa a la creación de los números, el ser humano tuvo que aprender a reconocer si dos conjuntos tenían la misma cantidad de objetos. Luego de un tiempo de maduración intelectual, logró entender que dos conjuntos tienen la misma cantidad de objetos, independientemente de cuál sea esa cantidad, si puede establecer una correspondencia "*biunívoca*" entre los elementos de dichos conjuntos.

Hace milenios los pastores podían comprobar, sin conocer los números, si todas las ovejas que había sacado a pastar por la mañana, regresaban a la tarde. Para ello, debían de colocar una piedra, u otro pequeño objeto, en algún recipiente, por cada oveja que salía a pastar al campo, y cuando regresaban, iban sacando una piedra por cada animal que llegaba. Sabían que habían regresado todas si al final no quedaba ningún guijarro[1] en el recipiente, y que se había perdido alguna oveja, o habían sido atacadas por los lobos, si aún quedaban piedras.

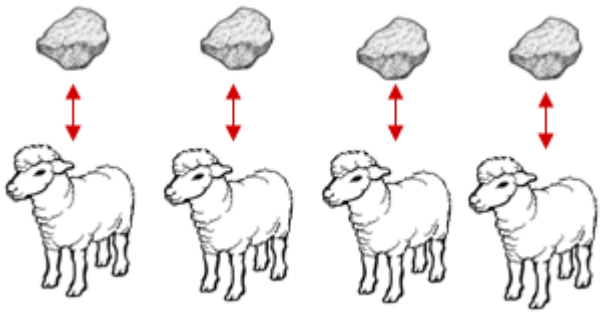


Figura 1: Correspondencia "biunívoca" entre la cantidad de ovejas y la de piedras.

Pero, además, se produjo un avance significativo hacia el concepto de número porque el ser humano introdujo una familia de objetos de referencia, como por ejemplo, los dedos de las manos, piedras, nudos en una cuerda, incisiones en el suelo, en un palo o en un hueso. Así, dos ovejas se correspondían con dos dedos, dos muescas o dos piedras.

Este fue el origen del primer concepto de número desarrollado por la humanidad, así como el proceso de contar asociado. Esos elementos de referencia "inventados" se

[1] Guijarro: piedra pequeña y redondeada a causa de la erosión, que se encuentra generalmente a orillas de ríos y arroyos.

podían utilizar para “contar” cualquier conjunto de objetos y eran manejados por todas las personas de una misma zona.
Lo anteriormente expuesto fue un proceso de abstracción que duró varios milenios. Las primeras evidencias de registros numéricos datan de hace más de 20.000 años.
Una de ellas es un hueso (peroné) de un simio con 29 incisiones, conocido como *El hueso de Ishango*, el cual se muestra en la siguiente figura.

Figura 2: El Hueso de Ishango. Contiene tres grupos de muescas, quizás como parte de un proceso de contar animales u objetos. Fuente: Wikimedia Commons.

El mismo fue hallado en *1960*, en lo que entonces era el Congo Belga, cerca de la zona donde nace el río Nilo. Ahora bien, representar números cada vez más grandes utilizando los dedos de la mano o por acumulación de muescas, nudos o guijarros se hizo inviable.
Esta situación se planteaba en las tribus que poseían grandes rebaños domesticados o que practicaban una agricultura diversificada y desarrollada. Por esta razón, muy pronto se vieron en la necesidad de elaborar un sistema que les permitiese contar grandes cantidades de una manera más eficiente.
Es así como comenzaron a surgir incipientemente los primeros sistemas de numeración. De esto nos ocuparemos en los capítulos siguientes.

Capítulo 1
El origen de los primeros números

Hacia fines del último período glacial, aproximadamente trece mil años atrás, el nivel del mar comenzó a elevarse y la temperatura terrestre aumentó entre cinco y diez grados centígrados, lo que modificó la fauna y flora de todos los continentes. Como consecuencia de ello, los alimentos empezaron a escasear. Fue entonces cuando los primeros habitantes de la región de Medio Oriente descubrieron una nueva manera de obtener alimentos, que consistía en el cultivo de cereales y en las crías de animales, especialmente cabras y ovejas. Es así como en esta región el hombre desarrolló por primera vez la agricultura y la ganadería. Pero para poder dedicarse al cuidado de los cultivos, debió abandonar su vida nómade. Este cambio vida en la historia de la humanidad generó, en toda esta región, la aparición de los primeros asentamientos.

Con los asentamientos se produjo el desarrollo de la agricultura y la ganadería, y fruto de ello, se originó el comercio: primero mediante el intercambio de productos y más tarde a través de la compra-venta. En ese momento, alrededor del año *4000* a.C., las personas se vieron en la necesidad de "*registrar o anotar*" los objetos que comercializaban o los bienes que poseían. Así, los primeros documentos escritos, hallados en la Mesopotamia, contenían símbolos que actualmente llamamos "*números"*.

Pocos siglos más tarde en Egipto comenzaron a surgir, de manera independiente, documentación escrita que contenían también "*números"*.

En este capítulo veremos cómo fueron estos primeros documentos escritos y qué símbolos utilizaban para representar los números.

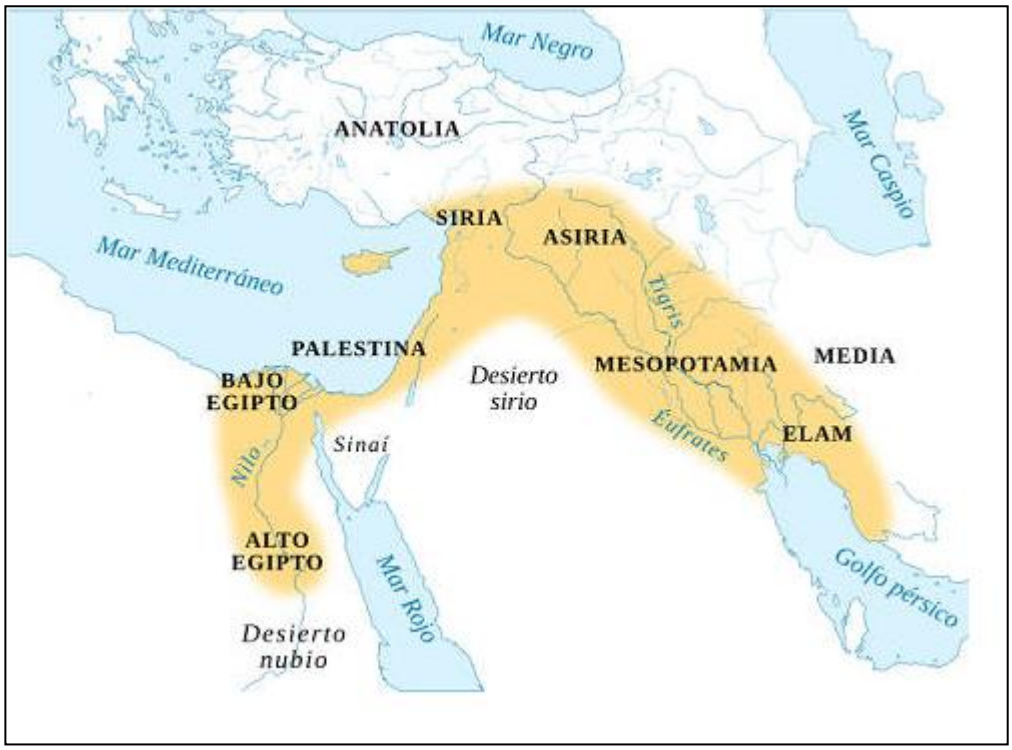


Figura 1.1: Egipto y Mesopotamia. Fuente: https://contaestudio.com/historia-contabilidad/

Mesopotamia, cuna de los números

Los primeros indicios de pueblos civilizados aparecieron en la Mesopotamia - la región comprendida entre los ríos Éufrates y Tigris, en el actual Irak - y habitada originalmente por los sumerios. Alrededor del año *4000* a.C. en toda esta zona existían numerosas ciudades-estados, como se ilustra en el siguiente mapa.

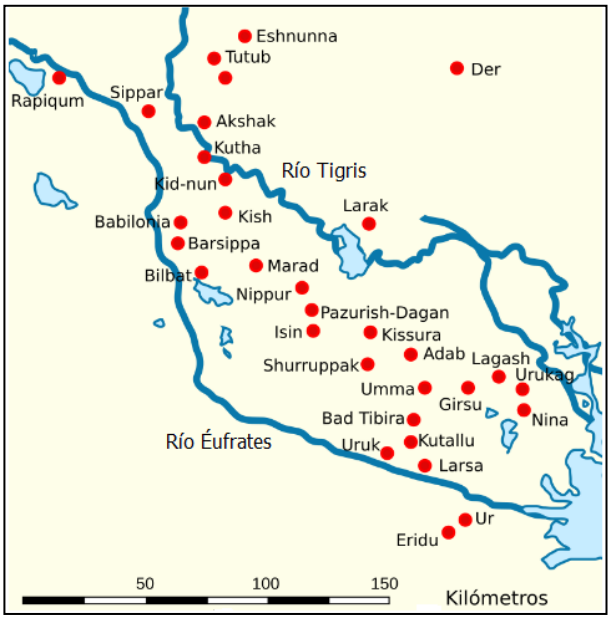


Figura 1.2: Ciudades sumerias, año 4000 a.C. Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Sumeria

La más importante de ellas era Uruk, situada en el actual Irak. En ese entonces dicha ciudad era considerada la más grande del mundo. Contaba con una población de 40.000 habitantes y una superficie de 400 hectáreas. La vida cotidiana en Uruk, al igual que cualquier ciudad sumeria, giraba en torno a su templo o zigurat. Además de su función religiosa, los templos constituían el centro de la administración de la tierra, de sus cultivos y del comercio.

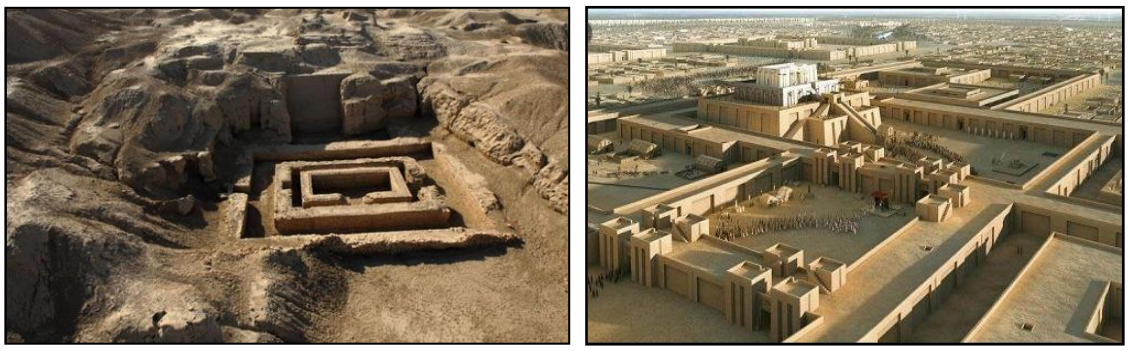


Figura 1.3: Izquierda: restos de Uruk. Derecha: reconstrucción de la ciudad de Uruk. Fuente: https://elpuntano.com/2015/06/06/uruk-la-ciudad-mas-antigua-del-mundo/

Las ciudades mesopotámicas estaban en permanente contacto y llevaban a cabo numerosas transacciones comerciales. Por esta razón se vieron en la necesidad de elaborar un método destinado a auxiliar a la memoria y que permitiera registrar, de manera duradera, las operaciones comerciales y la cantidad de bienes personales de

cada individuo. Con este objetivo los sumerios inventaron seis símbolos, que los utilizaron tanto para representar una determinada cantidad como para realizar con ellos operaciones aritméticas. Es así como aparece, por primera vez en la historia de la humanidad, el concepto abstracto de "*número*".
Para representar estos símbolos, y debido a la abundancia de arcilla en la región, los sumerios utilizaban fichas de este material que, según su forma y tamaño, identificaban a cada una de estas cifras. En la siguiente figura mostramos estos símbolos y su valor equivalente en nuestro sistema decimal.

Figura 1.4: Sistema de numeración sumerio.

Observamos aquí una idea que ya era abstracta para la época: la multiplicación por diez del valor de una ficha está representado por la perforación de dicho objeto. En efecto, haciendo una pequeña marca circular (que es el símbolo gráfico que representa al número *10*) en el cono que vale *60* o en la esfera que vale *3600*, se obtienen las representaciones respectivas de los números *600* (= *60 x 10*) y *36000* (= *3600 x 10*). Partiendo de estos símbolos, se podían representar los otros números empleando el Método Aditivo. De este modo, cada número se obtiene mediante la acumulación de estos seis símbolos básicos. En los siguientes ejemplos mostraremos cómo lo hacían y de qué manera sumaban.

Ejemplo 1.1

Expresar el número *163* en el sistema de numeración sumerio.

Solución

Utilizamos *2* conos grandes, *4* esferas pequeñas y *3* conos pequeños, ya que

$$163 = 2 \times 60 + 4 \times 10 + 3 \times 1$$

Entonces, *163* expresado en el sistema sumerio es

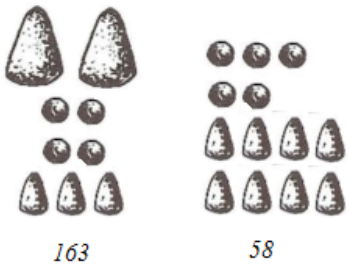
En general, los símbolos se escribían de arriba hacia abajo, ubicando los de mayor valor en la parte superior.

Ejemplo 1.2

Aplicando el sistema de numeración sumerio, calcular *163 + 58*.

Solución

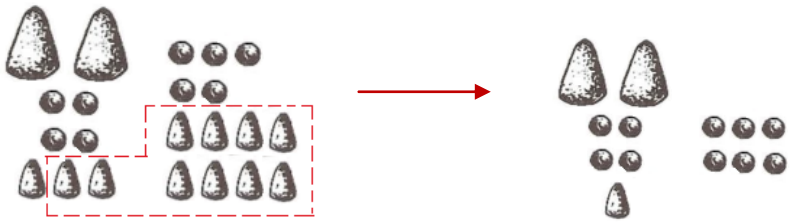
Primeramente expresamos los números *163* y *58* en el sistema sumerio:



La metodología que empleaban para sumar consistía en sustituir cada *10* conos pequeños por *1* esfera pequeña, *6* esferas pequeñas por *1* cono grande y así sucesivamente. Detallaremos cada uno de estos pasos.

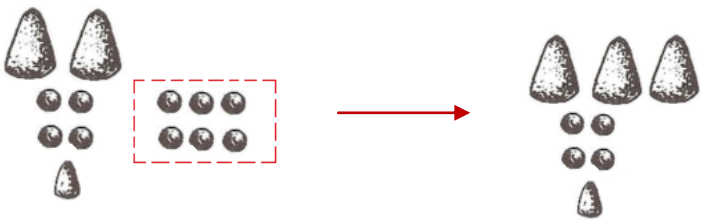
Primer Paso:

Reemplazamos *10* conos pequeños por *1* esfera pequeña



Segundo Paso:

Sustituimos *6* esferas pequeñas por *1* cono grande



Tercer Paso:

Finalmente, el resultado de la suma es

Que expresado en nuestro sistema decimal es *3 x 60 + 4 x 10 + 1 = 180+40+1= 221*.

¿Cómo eran en Mesopotamia los primeros documentos escritos?

El primer recibo de compra-venta de la historia

Alrededor del año *3500* a.C. en todas las ciudades mesopotámicas se vieron en la necesidad de guardar constancia de los datos numéricos asociados, por ejemplo, a la cantidad de cereales y animales involucrados en una compra-venta entre un agricultor y un ganadero, al número de ovejas que posee un pastor, al pago de obreros de la construcción o a la cantidad de habitantes existentes en cada ciudad. Por esta razón los primeros registros estaban vinculados a actividades contables. En ese entonces, la contabilidad quedaba asentada en una bola de arcilla fresca y hueca, dentro de la cual se colocaban las fichas de arcilla que representaban una determinada cantidad. Luego la bola se cerraba y en el exterior de la misma se imprimía un sello cilíndrico para garantizar su origen y veracidad. El sello cilíndrico es el equivalente al sello y firma personal de nuestros tiempos. Al secarse la arcilla, se conservaba dentro la información numérica deseada. Pasado un tiempo, si era el momento de comprobar la información, por ejemplo, para realizar el pago de una compra, se rompía la bola de arcilla, pudiendo acceder a la información numérica guardada. Podemos afirmar que este procedimiento fue el *primer recibo de la historia*. La siguiente imagen muestra una bola de arcilla hueca, hallada al sur de Mesopotamia. En su interior había tres fichas, que figuran a la derecha: un cono y dos esferas grandes. Las fichas indicaban la cantidad de objetos contados: *60 + 2 x 3600 = 7260.*

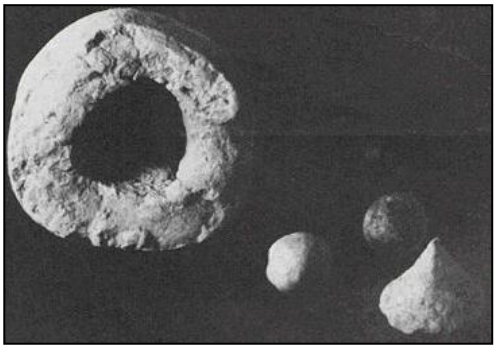


Figura 1.5: Bola hueca de arcilla con sus correspondientes fichas. Datan del tercer milenio a.C.
Fuente: http://es.finaly.org/index.php/El_primer_antecedente_de_la_escritura

Veamos un Ejemplo que ilustrará un hipotético modo de utilizar este tipo de registro numérico.

Ejemplo 1.3

Un ganadero y un agricultor sumerios decidieron intercambiar bueyes por cebada, y llegan a un acuerdo de compra-venta de *14* bueyes a cambio de *686* cestos de cebada, a entregar al finalizar la época de cosecha del cereal. Deberán registrar la información de la transacción, para que cuando ésta se lleve a cabo, no haya ninguna duda. Para ello el ganadero, con el fin de registrar la cantidad de *14* bueyes, introduce en una bola de arcilla fresca una esfera y cuatro conos pequeños. Luego la cierra e imprime su sello cilíndrico en el exterior. Por otro lado, el agricultor introduce en otra bolsa de arcilla fresca, un cono grande perforado, un cono grande, dos esferas y seis conos pequeños,

para indicar los *686* cestos de cebada. También cierra la bolsa e imprime sobre ella su sello cilíndrico. Una vez secas, intercambian las bolsas de arcilla con las cantidades registradas, que guardarán hasta el momento de intercambiar los productos.

Los primeros documentos escritos

Poco tiempo después, con el fin de no tener que romper la bolsa de arcilla cada vez que se quería comprobar la cantidad registrada, se empezaron a marcar los "cálculos" que luego iban a introducirse en la bolsa de arcilla, sobre el exterior de la misma. De esta forma, observando el exterior de la bolsa de arcilla, ya se conocía la cantidad representada en su interior. Este pequeño chispazo de ingenio y practicidad dio origen a un paso gigantesco en la historia de la humanidad: las bolsas de arcilla marcadas se transformaron en los *primeros documentos escritos*.
En la siguiente Figura observamos una bola de arcilla hallada en Uruk. A la derecha se encuentran las fichas que se hallaban en su interior. Las fichas registraban la cantidad de objetos contados, a saber: *60 + 3 x 10 + 3 x 1 = 60 +30+ 3 = 93.* Esa misma cantidad era indicada en el exterior de la esfera.

Figura 1.6: Esfera hueca de arcilla y fichas que representan una determinada cantidad. Datan del año 3300 a.C. Fuente: http://art.lostonsite.com/67021081-001/

El siguiente paso en el camino de la escritura numérica, fue que los sumerios se percataron de que realmente no necesitaban los "cálculos" que estaban dentro de la bolsa de arcilla, ya que bastaba con observar las impresiones en el exterior para conocer el número que se representaba en la misma. Por este motivo, empezaron a utilizar simplemente tablillas frescas de arcilla sobre las que presionaban los "cálculos". De este modo quedaba registrado el número contable, manteniendo la idea del sello cilíndrico por encima de las cantidades, como certificación de autenticidad.

Figura 1.7: Izquierda: Sello cilíndrico hallado en Mari (Siria). Data del año 2500 a.C. Derecha: Impresión del sello sobre una tablilla de arcilla. Fuente: http://art.lostonsite.com/67021081-001/

El sello cilíndrico se lo hacía girar sobre la tablilla de arcilla aún fresca para que luego, al secarse, quedara fijada su impronta.

Ejemplo 1.4

La tablilla que se muestra en la siguiente figura contiene ciertas marcas impresas. También se observan marcas de un sello cilíndrico. Fue hallada en Susa (actual Irán) y data aproximadamente del año 3200 a.C. ¿Qué dato numérico quedó registrado en dicha tablilla?

Figura 1.8: Tablilla de arcilla. Se encuentra actualmente en el Museo de Louvre.
Fuente: https://culturacientifica.com/2018/10/31/el-origen-de-la-escritura-de-los-numeros/

Solución

La tablilla contiene *6* marcas redondas, correspondientes a esferas pequeñas, y *3* marcas alargadas de bastoncillos, que simbolizan conos pequeños. Luego, en dicha tablilla quedó representado el número $6 \times 10 + 3 \times 1 = 63$.

Un paso más en el camino de la escritura

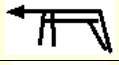
Como lo importante eran las marcas que quedaban impresas en la arcilla, comenzaron a realizarlas con un punzón, teniendo en cuenta la siguiente regla para representar los símbolos del sistema numérico:

Muesca fina: 1
Impresión circular pequeña: 10
Muesca grande: 60
Muesca grande con impresión circular pequeña: 600
Impresión circular grande: 3600
Impresión circular grande con impresión circular pequeña: 36.000

Esta forma de escribir fue derivando más adelante hacia una grafía cuneiforme.
En las primeras tablillas de arcilla se consignaban solamente las cantidades, sin especificar a qué se referían éstas, y además se confeccionaba una tablilla para cada cantidad. Por ejemplo, si se pretendía hacer un registro de *100* bolsas de trigo, se utilizaba simplemente una tablilla con el número *100* impreso, sin aclarar de que esa cantidad representaba las *100* bolsas de trigo.

Las transacciones económicas se fueron multiplicando, así como los registros contables de las mismas, por lo que hacia el año *3100* a.C. se empezaron a incluir diferentes registros en una misma tablilla y a utilizarse pictogramas, para indicar los objetos a los que se refería cada cantidad de la tablilla (cereales, ovejas, bueyes, etc.). Asimismo, se comenzaron a combinar varios pictogramas para obtener nuevos significados: *acaba de nacer la escritura por primera vez en la Historia.*

En la siguiente tabla mostramos algunos símbolos pictográficos utilizados en las primeras escrituras.

Signo pictográfico	***Interpretación***	***Significado***
	Estrella	*Dios*
	Sol sobre el horizonte	*Día*
	Ola	*Agua*
	Espiga	*Cebada*
	Cabeza de res	*Buey*
	Cuenco	*Ración de comida*
	Cabeza + Cuenco	*Comer*
	Cabeza + Agua	*Beber*
	Cabeza + Estrella	*Sacerdote*
	Cuerpo amortajado	*Hombre*
	Pierna	*Andar, estar de pie*
		Sol, tiempo
	*Animal*	*Carnero*
		Cabra
	Jarrón	*Recipiente, barril*

En los siguientes ejemplos trataremos de “leer” algunos de estos primeros documentos escritos.

Ejemplo 1.5

La siguiente tablilla fue encontrada en la antigua ciudad-estado de Jemdet Nasr, en las cercanías de Babilonia, en el actual Irak. Data del tercer milenio a.C. y contiene varios registros, divididos en filas y columnas. La tablilla no ha podido ser traducida en su integridad, pero se sabe que tiene que ver con las mercancías acordadas para cada día en particular.

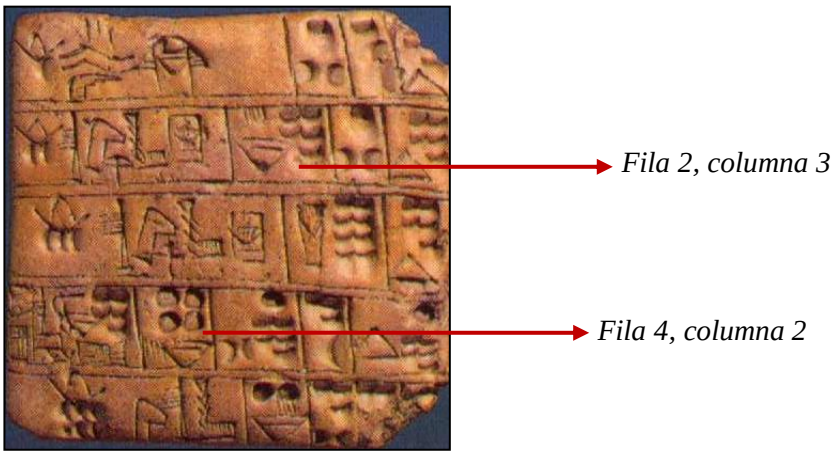


Figura 1.10: Tablilla de Jemdet Nasr. Fuente: www.proel.org/index.php?pagina=alfabetos/protosum

Analizaremos solamente dos de los registros contenidos en ella:

Fila 2, columna 3:

Aparecen 5 muescas grandes y 5 finas. Luego, el número representado es *5 x 60 + 5 x 1 = 305*
El pictograma simboliza un recipiente, con lo cual concluimos que se distribuyeron *305* raciones de alimento.

Fila 4, columna 2:

Figuran 4 impresiones circulares pequeñas y 5 muescas finas, a la izquierda del cuenco. Luego, el número representado es 4 *x 10 + 5 x 1 = 45*
El pictograma también simboliza un recipiente, de modo que se distribuyeron *45* raciones de alimento.

Con el correr del tiempo se fueron creando otros símbolos para representar cantidades, los cuales variaban según el tipo de dato que se deseara contar. Así, para contar objetos discretos como animales, madera o plantas, se empleaban los seis símbolos detallados en la figura *1.4*. En cambio, cuando se deseaba contar objetos menos discretos como granos de cereales, leche o queso, se utilizaba otro sistema, que constaba de los siguientes símbolos:

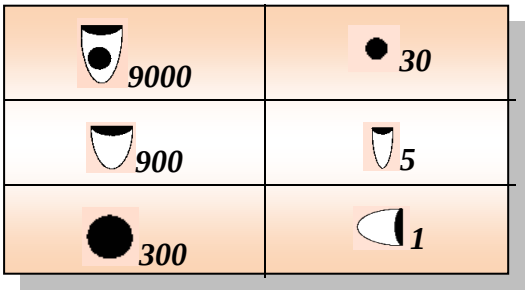


Figura 1.9: Sistema de numeración para contar cereales.

En el próximo ejemplo veremos cómo utilizaban este sistema.

Ejemplo 1.6

La siguiente figura muestra una tablilla de arcilla de *3x3* pulgadas. Fue hallada en el templo de Uruk y data aproximadamente del año *3100* a.C.

Figura 1.10: Tablilla de arcilla.
Fuente: https://elretohistorico.com/nombre-propio-mas-antiguos-del-mundo/

¿Qué quedó registrado en esta tablilla?

Solución

En la tablilla aparecen tallados los siguientes símbolos:

Lo que se está contando queda indicado con el símbolo de una espiga, para indicar que la cantidad se refiere a cebada. Se encuentran como signos numéricos los siguientes:

$$3 \times 9000 + 1 \times 900 + 6 \times 30 + 1 \times 5 + 1 \times 1 = 28086$$

Dentro del rectángulo que representa el tiempo se muestra la cantidad:

$$3 \times 10 + 1 \times 7 = 37$$

Es decir, *37* meses. A la izquierda del pictograma de la cebada hay dibujado un edificio de ladrillo con chimenea, que representa una fábrica. El recipiente con una espiga de cebada en su interior simboliza el envasado de la cerveza.
Por otro lado, en la parte superior izquierda se encuentra la firma del responsable de la tablilla. Contiene dos símbolos que representan las sílabas Ku y Shim. En base a esta información, podemos deducir que:
La tablilla es un registro administrativo. Allí queda constatado que se ha recolectado *28086* medidas de cebada en un tiempo de *37* meses, para fabricación y envasado de cerveza. La persona que recibe esa cantidad de cebada es KuShim, quien debió haber sido un jefe administrativo dentro del templo.
Otros arqueólogos opinan que quizás fue el maestro cervecero del templo. La cerveza era la bebida más popular en Mesopotamia y se racionaba entre los trabajadores.

Ejemplo 1.7

La siguiente figura muestra una tablilla administrativa sumeria, con números y pictogramas. Fue encontrada en la antigua ciudad-estado de Lagash, en el actual Irak. Data aproximadamente del año *2350* a.C.

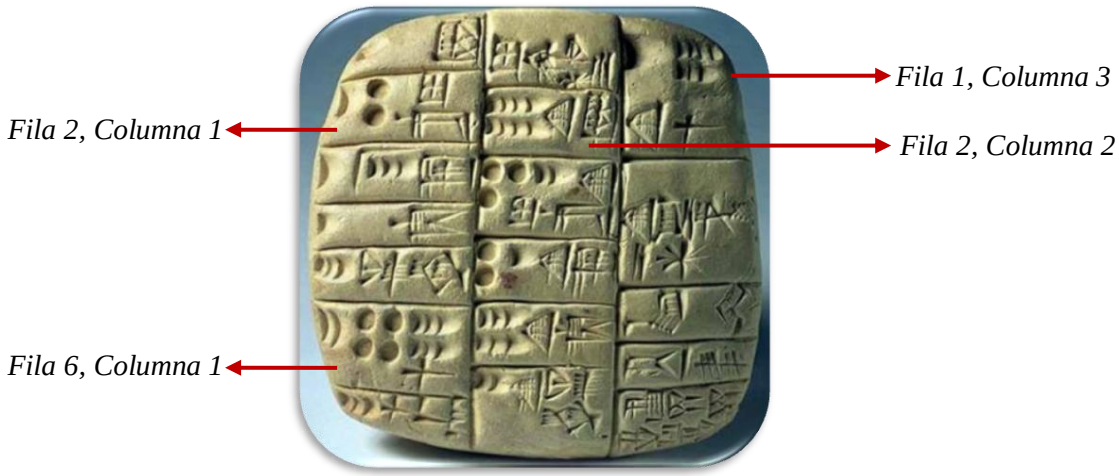


Figura 1.11: Tablilla de arcilla. Se encuentra actualmente en el Museo de Louvre.
Fuente:https://culturacientifica.com/2018/10/31/el-origen-de-la-escritura-de-los-numeros/

Analizaremos algunos registros contenidos en ella.

Fila 2, columna 1:

Aparece 1 muesca grande y 2 círculos. Luego, el número representado es

$$1 \times 60 + 2 \times 10 = 80$$

El pictograma simboliza un carnero, con lo cual interpretamos que quedaron registrados 80 carneros.

Fila 6, columna 1:

Quedó tallado el siguiente número:

$$2 \times 60 + 4 \times 10 + 1 \times 6 = 166$$

El símbolo pictográfico que figura es el de una cabra. Luego, hay registradas *166* cabras.

Fila 1, columna 3:

Se encuentran los siguientes signos numéricos:

$$1 \times 60 + 1 \times 7 = 67$$

Como símbolo pictográfico figura un cuenco y una cabra, se interpreta que se han recolectado *67* raciones de carne de cabra, posiblemente como alimento para ciertos trabajadores.

Fila 2, columna 2:

Quedó grabado el siguiente número:

$$1 \times 8 = 8$$

Además, figura un cuenco y un rectángulo con una espiga en su interior, con lo cual podemos concluir que quedaron registradas 8 raciones de pan de centeno.

La invención de la escritura cuneiforme

Hacia el año *3000* a.C. la escritura en Mesopotamia evoluciona y, para facilitar las tareas administrativas, las antiguas fichas con las que se realizaban los cálculos fueron reemplazadas por cálamos de madera con un punzón adherido a sus extremos, el cual, según el tallado, representaba un determinado símbolo.

Este tipo de escritura, llamada *cuneiforme*, toma su nombre por la forma de cuña que adoptan los símbolos, la cual se lograba presionando con un punzón o cálamo sobre la tablilla de arcilla fresca que luego se cocía o se dejaba secar al sol. Su aplicación se extendió a toda la región de Medio Oriente y fue utilizado hasta el siglo I d.C.

Se cree que el invento de este tipo de escritura se debió a los funcionarios de los templos, ya que ellos tenían bajo su responsabilidad la administración de las ciudades-estado.

Figura 1.12: Escritura cuneiforme y cálamo
Fuente: http://antiguosaber.blogspot.com/2015/03/el-surgimiento-del-lenguaje-escrito-de.html

Mientras tanto, ¿qué ocurría en Egipto?

En Egipto, una civilización independiente comienza a expandirse rápidamente hacia fines del cuarto milenio a.C. Pero la situación por lo que respecta a la escritura es poco clara. En primer lugar, el soporte material, excepto para las inscripciones monumentales, es el papiro o la madera. Además, la historia de las excavaciones arqueológicas es muy diferente a la de la Mesopotamia: En Egipto, la mayoría de las excavaciones se han realizado en zonas desérticas, lejos de las ciudades de adobe, y se han concentrado casi exclusivamente en cementerios y templos de piedra. Egipto nos ha legado pues menos documentos escritos que Mesopotamia: centenas de veces menos. Pero los testimonios que quedan sobre la naturaleza del uso cotidiano de la escritura muestran, también en este caso, la existencia precoz de los textos de economía y de sus cuentas.

La aparición en Egipto de los primeros números

Hacia el año *3300* a.C., los egipcios también estaban en condiciones sociológicas y económicas completamente favorables para la invención de los números y de la escritura. En esa época, esta civilización ya estaba fuertemente urbanizada. Motivados por una necesidad de tipo administrativa y comercial, poco a poco fueron cobrando conciencia de la limitada capacidad que tiene la memoria humana y de la necesidad de recordar en forma duradera tanto la palabra como ciertas cantidades. Para superar esta dificultad descubre la idea de la representación gráfica de los números y de los primeros pictogramas, llamados *jeroglíficos*.
Desde su aparición, la numeración egipcia permitió la representación de números que podían llegar hasta el millón e incluso superarlo: poseía un símbolo especial para indicar la unidad y cada una de las *6* potencias de *10* siguientes (*10, 100, 1000, 10000, 100000* y *1000000*). En la siguiente figura mostramos cada uno de estos símbolos.

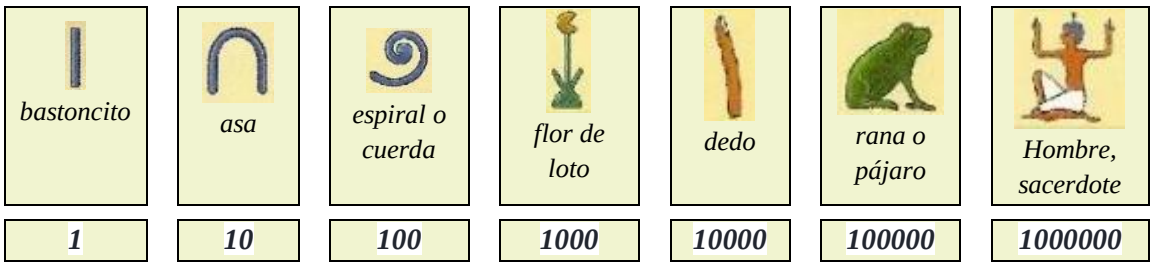
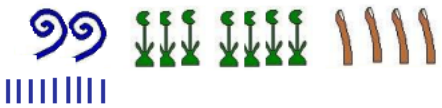


Figura 1.13: Sistema de numeración egipcio.

Observemos que cada símbolo es *10* veces el anterior, o sea, se organiza igual que nuestro sistema decimal.
Para representar cualquier número, los egipcios también usaban el Método Aditivo, repitiendo los símbolos de este sistema tantas veces como fuera necesario.
Al principio, los signos que conforman un número podían escribirse en cualquier orden: de izquierda a derecha, de derecha a izquierda, de arriba hacia abajo o de abajo hacia arriba.

Ejemplo 1.8

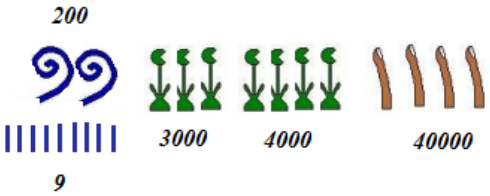
En Asuán (Egipto) se encontró una estatua que se remonta al año *2800* a.C. aproximadamente. Dicha estatua, erigida en honor a un rey llamado Khasekhemen, contiene la escritura siguiente que indica la cantidad de enemigos matados por ese soberano:



¿Qué número está representado en estos símbolos?

Solución

Teniendo en cuenta la tabla de la figura *1.12*, tenemos los siguientes valores para cada símbolo:



Luego, el total de individuos que el rey mató fue:

$$200 + 9 + 3000 + 4000 + 40000 = 47209.$$

A partir del año *2700* a.C. aproximadamente, para evitar la acumulación sobre una misma línea de vanos símbolos del mismo tipo y para facilitar también la lectura de los mismos, los signos idénticos comenzaron a representarse en grupos de dos, tres o cuatro líneas. Esto permitió efectuar los cálculos aritméticos de una manera más sencilla. En el siguiente ejemplo mostraremos cómo sumaban los egipcios.

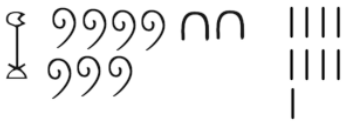
Ejemplo 1.9

Aplicando el sistema de numeración egipcio, calcular *1729 + 696*.

Solución

Primeramente expresamos los números *1729* y *696* en el sistema egipcio. Los ubicamos uno debajo del otro, de modo tal que los símbolos idénticos queden alineados:

1729



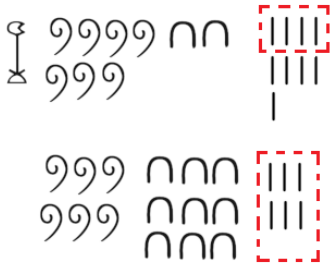
696

La metodología que empleaban para sumar era igual a la de los sumerios. Se sustituyen cada *10* bastoncitos por *1* asa, *10* asas por un espiral, *10* espirales por *1* flor de loto y así

sucesivamente. Una vez acabado todo esto se obtiene el resultado de la operación. Detallaremos cada uno de estos pasos.

Primer Paso:

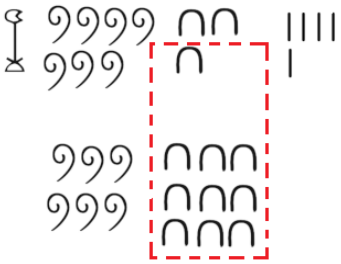
Reemplazamos *10* bastoncitos por *1* asa:



De este modo, resulta

Segundo Paso:

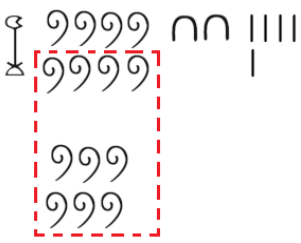
Sustituimos *10* asas por *1* espiral:



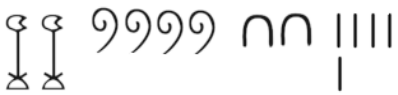
Con lo cual obtenemos

Tercer Paso:

Reemplazamos *10* espirales por *1* flor de loto:



Para obtener finalmente



Este es el resultado de la suma que, expresado en nuestro sistema decimal, es

$$2 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \times 1 = 2425.$$

Como mencionamos anteriormente, la orientación de los signos que conforman un número era indistinta. Muchas veces esta disposición variaba para lograr una mayor armonía estética, y solían ir acompañados de los jeroglíficos que indicaban el tipo de objeto que se contaba.

Las escrituras jeroglífica y hierática

Los jeroglíficos fueron un sistema de escritura inventado por los antiguos egipcios y que comenzaron a utilizarse hacia el *3300* a.C. Sus símbolos han sido inspirados de la flora y fauna del Nilo. Este tipo de escritura se grababa sobre piedra o madera, y estaba reservada para los monumentos reales, templos, palacios o tumbas.
Debido a la complejidad de sus símbolos, los jeroglíficos resultaban poco prácticos para escribir documentos relacionados a actividades cotidianas. Por esta razón la escritura jeroglífica evolucionó hacia una más sencilla, llamada *hierática*. La escritura hierática fue utilizada exclusivamente en todos los documentos corrientes, los cuales se escribían en hojas de papiro y empleando un junco humedecido en alguna materia colorante.
En general, las hojas papiro no pueden conservarse mucho tiempo, como ocurre con las tablillas de arcilla de Mesopotamia. Es por ello que la documentación escrita de Mesopotamia es considerablemente mayor que la existente en Egipto.

Figura 1.14: Escritura hierática de un fragmento del papiro de Rhind. Contiene la resolución de problemas matemáticos. Fuente: http://enegiptoconfverdu.blogspot.com/2012/01/historia-del-papiro-de-rhind-y.html

Alrededor del año *2000* a.C., tanto la escritura hierática de Egipto como la cuneiforme de Mesopotamia habían alcanzado lo que parece ser una forma estable. Los textos matemáticos, que contienen la resolución de ciertos problemas prácticos, poseen esos tipos de escritura. Este tema lo desarrollaremos en el capítulo 5.

Capítulo 2
Los escribas, antecesores de los matemáticos

Hacia fines del tercer milenio a.C., existían tanto en Egipto como en Mesopotamia numerosos templos, los cuales se transformaron en el centro de la vida cotidiana. Con el correr del tiempo los templos se convirtieron, además, en centros de administración de justicia, de las tierras, del comercio y del diseño de obras públicas. Este tipo de actividad demandaba una gran facilidad en el manejo de números. Así, se requería cada vez más la formación de personas especializadas en estos temas. Éste fue el factor principal que motivó el surgimiento de escuelas, destinadas a formar estudiantes que egresaban bajo el título de "*escriba*". En este capítulo hablaremos de estas primeras escuelas y qué formación adquiría un escriba.

Las primeras escuelas

En el año *3000* a.C., las numerosas ciudades de Egipto y Mesopotamia precisaban personal especializado para administrar el comercio, llevar a cabo censos, cobrar impuestos, registrar la entrada y salida de productos, efectuar contratos, construir obras públicas y pagar a los obreros de la construcción. Para responder a estas necesidades, se fundaron las primeras escuelas. En Egipto las llamaban "*La Casa de Vida*", mientras que en Mesopotamia recibieron el nombre de "*La Casa de las Tablillas*", debido a que los materiales utilizados para aprender a leer y escribir eran las tablillas de arcilla. Al principio, la enseñanza sólo la disfrutaban los hijos de familias ricas, pues éstas eran las únicas capaces de hacer frente al gasto que implicaba una larga educación que duraba al menos diez años, y que se iniciaba en la niñez.

Casi con seguridad, los ingresantes a las escuelas eran de sexo masculino ya que las mujeres, aunque no les estaba prohibido recibir formación como escribas, no aparecen mencionadas en los documentos.

En las escuelas se enseñaba lectura, escritura, aritmética y geometría. Se sabe, además, que la aritmética se iniciaba en una fase temprana de la vida escolar de los niños y que las matemáticas eran consideradas, igual que ahora, una de las asignaturas más difíciles.

En Egipto los niños utilizaban, a modo de cuaderno, trozos de cerámica, conchas o placas de piedra caliza donde se trazaban cuadrículas. En cambio, en Mesopotamia, los niños practicaban sobre tablillas de arcilla.

Para aprender a escribir, los alumnos copiaban diferentes fragmentos de obras literarias. El siguiente texto, hallado en Mesopotamia, es un ejemplo de ejercicio escolar que formaba parte del curso obligatorio de lengua sumeria:

> *Una casa con cimientos como el cielo.*
> *Una casa que, como una escudilla, ha sido recubierta de lino.*
> *Una casa que, como una oca, reposa sobre una base sólida.*
> *Entramos en ella con los ojos cerrados.*
> *De ella salimos con los ojos abiertos.*
> *Solución: la escuela.*

Del contenido de esta tablilla se desprende que en esa época eran conscientes que la educación mejoraba y elevaba a las personas.

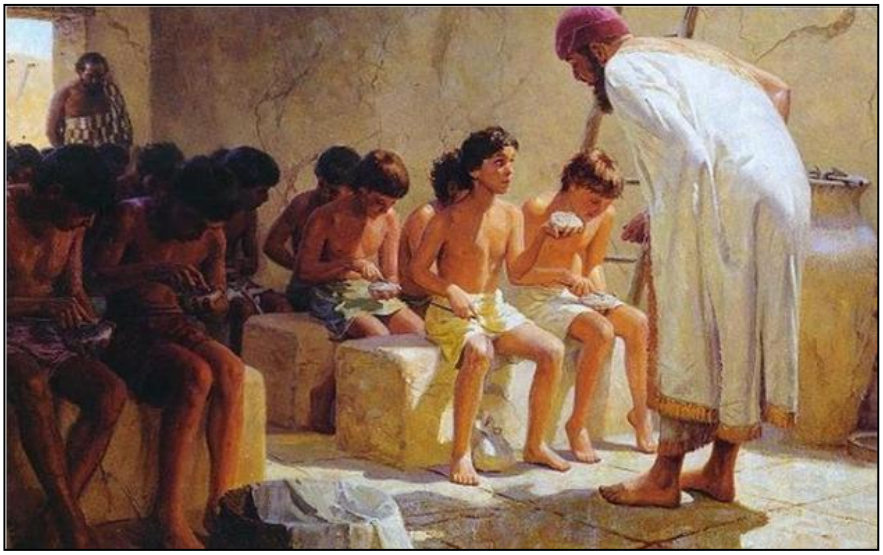


Figura 2.1: Recreación de una escuela en Mesopotamia.
Fuente: https://historiaeweb.com/2015/06/30/la-cultura-de-los-escribas-neosumerios/

De las numerosas tablillas halladas en Mesopotamia, fue posible vislumbrar la metodología didáctica aplicada en esa época.
Así, en el nivel inicial, los escolares practicaban ejercicios de escritura y operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división. El aprendizaje de la aritmética, al no existir aún el sistema posicional (con la noción del cero), demandaba mucho tiempo. En el nivel avanzado la enseñanza era más creativa, ya que los alumnos debían componer textos literarios. El siguiente relato, cuyo autor es un estudiante avanzado, muestra cómo transcurría su vida en "*La Casa de las Tablillas*":

Mis días de vacaciones son tres por mes, las diferentes fiestas son tres por mes, con esto son veinticuatro días que paso en la escuela…
…Mi conocimiento del arte de la escritura no desaparecerá, en adelante puedo aplicarme a las tablillas, a las multiplicaciones y a los balances.
Mi maestro me ha corregido con bellas palabras. Debemos alegrarnos de su compañía.
Conozco perfectamente mi arte de la escritura, tengo facilidad para todo.
Mi maestro me muestra un signo y yo agrego otros más de memoria.
Después de haber asistido a la escuela hasta el tiempo previsto, estoy a la altura del sumerio, del arte de la escritura, del contenido de las tablillas, del cálculo de los balances… ¡Puedo hablar sumerio!
Quiero escribir las tablillas: puedo escribir los contratos de matrimonio, la venta de casas, de campos, de esclavos… hasta las tablillas de contratos de adopción: todo esto sé escribir….

La vida cotidiana en las escuelas mesopotámicas

Según relata el asiriólogo Samuel Kramer (*1897-1990*) en su libro *La Historia empieza en Sumer* (véase Referencia [9]), entre *1970* y *1980* se descubrieron varias tablillas de arcilla escritas por un maestro anónimo, que vivió *2000* años antes de la era cristiana. En dichas tablillas el maestro relata cómo transcurría su vida cotidiana en la escuela y la de un estudiante en particular. El estudiante sumerio de quien se habla en el documento en cuestión, y que no difiere demasiado de los estudiantes de hoy en día, teme llegar tarde a la escuela «*y que el maestro, por este motivo, le castigue*». Al despertarse ya apremia a su madre para que le prepare rápidamente el desayuno. En la escuela, cada vez que se comportaba mal, era azotado por el maestro o uno de sus ayudantes. Del relato se desprende también que los alumnos pasaban todo el día en la escuela y que existían tareas escolares que debían preparar al regresar por la noche a sus hogares. También pudo comprobarse que rendían exámenes periódicamente.
En cuanto al salario del maestro parece que eran bajos y, por consiguiente, el maestro deseaba tener la ocasión de mejorarlo con algún suplemento por parte de los padres de los estudiantes.

Los escribas, egresados de las primeras escuelas

Una vez finalizados los estudios en "*La Casa de Vida*" o en "*La Casa de las Tablillas*", el egresado recibía el título de "*escriba*", que significa "*el que registra y hace las cuentas*". En promedio, los estudiantes finalizaban sus estudios a la edad de *18* años. Los escribas gozaban de gran prestigio dentro de la sociedad, a punto tal que muchos reyes mesopotámicos se vanagloriaban por haber obtenido este título.

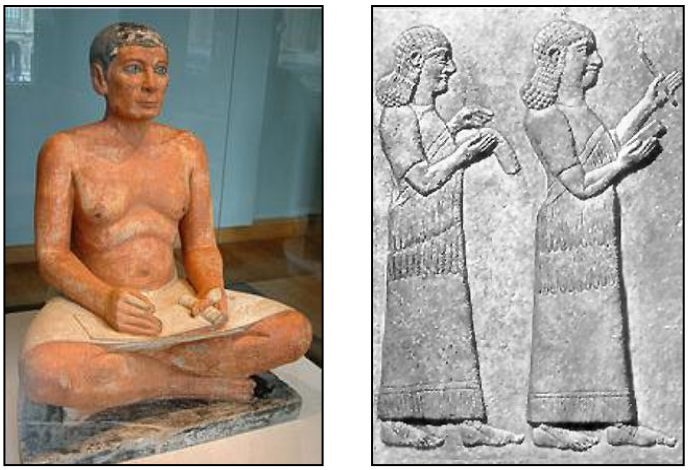


Figura 2.2: Izquierda: Escriba egipcio. Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Escriba
Derecha: Escribas mesopotámicos. Fuente: http://sepiensa.org.mx/contenidos/historia_mundo/antigua

Uno de ellos fue el rey Shulgi de la ciudad de Ur quien, alrededor del año *2000* a.C. presumía de sus éxitos escolares escribiendo:

Cuando era niño en la escuela.
En las tablillas de Sumer y Akkad aprendí el arte del escriba.
Entre los jóvenes, nadie sabe escribir una tablilla como yo…
Soy capaz de restar y de sumar a la perfección, calcular y hacer cuentas.
La justa Nanibgal, (la diosa) Nisaba, me dotaron generosamente de sabiduría e inteligencia.

Por otro lado, en Egipto los escribas siempre portaban sus instrumentos de trabajo: un pincel y una paleta con dos hendiduras para las tintas negra y roja. Se han esgrimido cuatro razones para el uso de la tinta roja en los papiros egipcios: enfatizar un elemento del texto, dividir un texto en diferentes secciones, aislar una palabra y diferenciar distintas categorías.

"Matemático", una palabra desconocida en la antigüedad

Es posible seguir la trayectoria de un joven escriba una vez concluida su formación, gracias a un número considerable de fuentes como textos contables y referencias en textos literarios o históricos.
Sin embargo, es infructuosa la búsqueda de una sola mención de un "*matemático*" en el sentido moderno del término, esto es, un individuo que trabaja en una comunidad reconocida de investigadores con el objeto de ampliar conocimientos acerca de las propiedades de los números y de la geometría. En las antiguas lenguas de Egipto y Mesopotamia no existía una palabra para designar a un "*matemático*".
Así pues, el joven escriba podía seguir dos caminos distintos. Algunos se dedicarían a la enseñanza de las matemáticas y tal vez inventarían nuevos problemas para presentarlos a la próxima generación de alumnos.
Otros ejercerían como contables, calculando el trabajo, las raciones, los terrenos y los cereales. Estos escribas estaban omnipresentes, y su permanente actividad está minuciosamente representada en los frescos murales egipcios y en los relieves de los palacios mesopotámicos. Su posición aparece como subalterna pero privilegiada. Al igual que sus colegas que habían elegido la docencia, no eran ellos los depositarios del poder en aquellas antiguas sociedades, pero estaban al servicio de quienes regían sus destinos y gozaban de suficientes privilegios como para haber sido inmortalizados en los muros de sus reyes o faraones, como signo visible de ese poder que tanto se esforzaban por contabilizar.

Capítulo 3
La Aritmética en Egipto

A comienzos del segundo milenio antes de Cristo, las civilizaciones de Egipto y Mesopotamia habían conseguido crear unos sistemas de numeración igualmente abstractos, si bien habían escogido medios diferentes para representar las cifras. Los egipcios, al igual que la gran mayoría de las sociedades modernas, tenían un sistema numérico decimal, esto es, en el que se cuenta hasta el nueve de cada unidad antes de pasar a la unidad superior siguiente (después de nueve "unos" aparece el "diez", después de nueve "dieces" aparece la centena, etc.). Pero, contrariamente a los sistemas modernos, su escritura numérica era "*aditiva*", esto es, había signos distintos para las unidades, las decenas y las centenas, y se trazaban tantos como fuera necesario. Ello se debía a que aún desconocían *el cero*. En este capítulo veremos cómo esta civilización realizaba las operaciones aritméticas básicas, las cuales serán necesarias para comprender ciertos algoritmos matemáticos que desarrollaremos en el capítulo *5*.

Cómo se efectuaban las operaciones aritméticas en el Antiguo Egipto

Podemos conocer la manera en que los egipcios realizaban las operaciones aritméticas gracias al *Papiro de Rhind* o *Papiro de Ahmés*. Su importancia radica en que, hasta ahora, es la mejor fuente que se conoce sobre la Matemática egipcia. Fue descubierto por el arqueólogo Henry Rhind (*1833-1863*) en *1858,* quien lo compró en un mercadillo de El Cairo. Actualmente se encuentra en el Museo Británico de Londres y mide *6* m. de largo por *33* cm. de ancho. Fue redactado en escritura hierática por un escriba egipcio de nombre Ahmés, alrededor del *1650* a. C. El documento es de carácter didáctico y contiene *87* problemas matemáticos, con sus algoritmos de solución, referentes a cuestiones aritméticas como fracciones, cálculo de áreas, de volúmenes, repartos proporcionales, regla de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica.

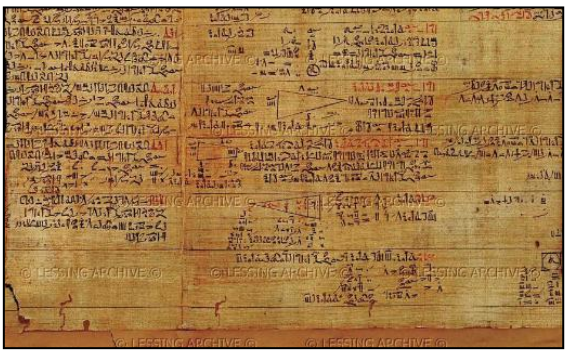


Figura 3.1: Fragmento del Papiro de Rhind.
Fuente: https://www.sutori.com/story/geometria-del-mundo-antiguo--vjGxsoa1ebxQVajTAEhRELSH

En este papiro nos basaremos para explicar el modo de operar de los egipcios. Veremos que prácticamente todas las operaciones aritméticas las realizaban sumando, duplicando y utilizando ciertas tablas. Pero previamente recordaremos cómo se definía el Sistema de Numeración Egipcio.

El Sistema de Numeración Egipcio

De acuerdo a lo expuesto en el capítulo *1*, pág. *18*, este sistema disponía de un símbolo para representar una *unidad*, otro símbolo para representar una *decena*, otro para una *centena* y así sucesivamente hasta llegar a un *millón*. Estos siete símbolos eran los siguientes:

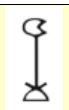
						
1	***10***	***100***	***1000***	***10000***	***100000***	***1000000***

Figura 3.2: Sistema de numeración egipcio.

A partir de ellos era posible construir cualquier número. En la práctica, pocas veces era necesario escribir números superiores a un millón.
El método para representar cualquier número consistía en escribir tantas veces como fuera necesario los símbolos anteriores, hasta alcanzar el número que se quería indicar.
Por razones estéticas los números egipcios no eran escritos a lo largo de una sola línea ya que hubieran resultado, en algunos casos, expresiones muy largas y difíciles de leer. En lugar de esto, los símbolos iguales se mostraban en grupos de cuatro jeroglíficos por línea, como máximo. En cualquier caso no había un orden establecido en el que tenían que aparecer los símbolos. Estos podían ser escritos en cualquier dirección. Sin embargo, de ahora en adelante y por convención, los símbolos de menor valor los ubicaremos a la derecha y los de mayor valor, hacia la izquierda.

Ejemplo 3.1

Representar el número *13682* en el sistema de numeración egipcio.

Solución

Teniendo en cuenta los símbolos de la figura *3.2* y la convención referente a cómo ubicar los símbolos que componen el número *13682*, su representación en el sistema egipcio es

Una diferencia importante entre los números egipcios y el sistema decimal utilizado en la actualidad es que el sistema egipcio era ***un sistema no posicional***. Esto significa que los símbolos que componen un número representan siempre el mismo valor, independientemente de la posición que ocupen dentro del número. El siguiente ejemplo aclarará este concepto.

Ejemplo 3.2

En el sistema que usamos actualmente, podemos escribir el número *42* a partir de los símbolos *4* y *2*. Dado que el *4* ocupa la primera posición, sabemos que en realidad representa el número *40* (*4 x 10*), mientras que el número *2* representa sólo *2* unidades. Si en lugar de *42* hubiéramos escrito 24 estaríamos representando un número distinto. En el caso de los números egipcios la posición es totalmente irrelevante, de modo que las siguientes escrituras representan exactamente el mismo número:

Figura 3.3: Distintas representaciones del número 42.

En este caso, ambas grafías representan al número *42*.

Los símbolos de suma y resta

El sistema de numeración egipcio contenía también algunos símbolos para representar operaciones matemáticas básicas.
Dos de estos símbolos eran el de la suma y el de la resta. Se los representaba con el jeroglífico de unos pies. Dependiendo de la dirección de los pies, se indicaba el carácter de suma o resta.

Suma (+) ***Resta (-)***

A continuación, veremos cómo, en el antiguo Egipto, efectuaban las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división.

La Suma en el Sistema Egipcio

El procedimiento para la suma fue explicado en el ejemplo *1.10* de la pág. *19*.

La Resta en el Sistema Egipcio

La metodología que empleaban para restar era similar a la de nuestro sistema. Se van eliminando los símbolos del minuendo tantas veces como símbolos idénticos tenga el sustraendo, comenzando por aquellos de menor valor.

Ejemplo 3.3

Dada la siguiente grafía:

1) ¿Qué operación aritmética está representada?
2) Resolver la operación aritmética que indica dicha grafía.

Solución

1) En dicha grafía está representada la operación $541-385$.

2) Primeramente ubicamos el sustraendo debajo del minuendo, de modo tal que los símbolos idénticos queden alineados:

Primer Paso:

Restamos las unidades entre el minuendo y el sustraendo. Como el minuendo tiene menos unidades que el sustraendo, sustituimos una decena del minuendo por *10* unidades:

Así, la cantidad de unidades resultantes es $11-5=6$ .De este modo, obtenemos

Segundo Paso:

Restamos las decenas entre el minuendo y el sustraendo. Nuevamente, como el minuendo tiene menos decenas que el sustraendo, reemplazamos una centena del minuendo por *10* decenas:

Luego, la cantidad de decenas resultantes es $13-8=5$ .De este modo, resulta

Tercer Paso:

Finalmente, restamos las centenas entre el minuendo y el sustraendo. Luego, la cantidad de centenas resultantes es $4-3=1$. En consecuencia, el resultado de la resta es

Es decir, *156.*

La Multiplicación en el Sistema Egipcio

En el Antiguo Egipto, multiplicar ***m*** por ***n*** se decía "***calcular a partir de m, n veces***". Se pudo conocer el procedimiento que empleaban para multiplicar gracias al Papiro de Rhind. Explicaremos cómo lo hacían desarrollando los siguientes Ejemplos, para luego justificar teóricamente el algoritmo. Para facilitar su comprensión, emplearemos nuestros símbolos decimales, en lugar de los egipcios.

Ejemplo 3.4

Aplicar el Método Egipcio para calcular 17×13.

Solución

Primer Paso:

Diseñamos una tabla con dos columnas. En la primera columna comenzamos con *1*, mientras que la segunda columna la inicializamos con el primer factor, en este caso *17*. Luego efectuamos duplicaciones sucesivas de las dos columnas simultáneamente. De este modo, en la primera columna iremos obteniendo potencias de *2*. Cuando en la primera columna (las potencias de dos) superemos el otro factor, en este caso *13*, terminamos.

Doble	*Doble*
1	*17*
2	*34*
4	*68*
8	*136*
16 (>13)	*Terminar*

Segundo Paso:

Sumamos los números de la primera columna, de abajo hacia arriba, hasta obtener el valor del segundo factor (es decir, *13*).

Doble	Doble
1	17
2	34
4	68
8	136
8+4+1=13	**136+ 68+ 17=221**

Luego, el producto será la suma de los valores de la segunda columna que se corresponden con los seleccionados de la primera columna. En consecuencia,

$$17 \times 13 = 221$$

De este modo, los egipcios podían realizar cualquier multiplicación simplemente aplicando sumas y duplicaciones.

Justificación del algoritmo:

$$221 = 136 + 68 + 17 = 17 \times 2^3 + 17 \times 2^2 + 17 \times 2^0 = 17 \times \left(2^3 + 2^2 + 2^0\right) = 17 \times 13$$

Ejemplo 3.5

Calcular 68×57.

Solución

Elaboramos la siguiente tabla:

Doble	Doble
1	68
2	136
4	272
8	544
16	1088
32	2176
64 (> 57)	Terminar

Nosotros contamos con una ventaja con respecto a los antiguos egipcios, porque hemos trabajado con el sistema binario, así que nos es mucho más fácil buscar la descomposición en potencias de dos de cualquier número. Más específicamente, como

$57 = 111001$ en base 2

Es decir

$$57 = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 32 + 16 + 8 + 1$$

Entonces ya sabemos qué números de la columna derecha debemos sumar. Por lo tanto

$$68 \times 57 = 2176 + 1088 + 544 + 68 = 3876$$

El hecho de que los egipcios expresaran uno de los factores del producto como suma de potencias de 2, nos conduce a afirmar que ellos fueron los precursores del sistema de numeración binario. Este antiguo método de multiplicación fue muy utilizado por los griegos y su uso se extendió hasta inicios de la Edad Media en Europa.

Observemos que, al efectuar la multiplicación de a por b, los elementos de la segunda columna de la tabla son de la forma $2^n . a$, con $n \in \mathbb{N}_0$ y tal que $2^n \leq b$. La siguiente Proposición justifica teóricamente este algoritmo.

Proposición 3.6: Justificación del Algoritmo egipcio de multiplicación

Sean $a, b \in \mathbb{N}$, $n_0 = max\left\{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 2^n \leq b\right\}$ *Entonces*

1) La descomposición de b en potencias de 2 es

$$b = 2^{n_0} + \sum_{n=0}^{n_0-1} b_n . 2^n \quad con\ b_n \in \{0, 1\}$$

2) $a . b = 2^{n_0} . a + \sum_{n \in B} 2^n . a$

Donde

$$B = \left\{n \in \{0,1,...,n_0 - 1\} \text{ tal que } b_n \neq 0\right\} = \left\{n \in \{0,1,...,n_0 - 1\} \text{ tal que } b_n = 1\right\}$$

Demostración

1) Como $n_0 = max\left\{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 2^n \leq b\right\}$ entonces

$$2^{n_0} \leq b \qquad \text{[I]}$$

Por otro lado,

$$b < 2^{n_0+1} \qquad \text{[II]}$$

Pues si suponemos por el absurdo que $2^{n_0+1} \leq b$ entonces $n_0 + 1 \in \left\{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 2^n \leq b\right\}$. Luego $n_0 + 1 \leq max\left\{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 2^n \leq b\right\}$, es decir, $n_0 + 1 \leq n_0$. De aquí resulta que $1 \leq 0$, lo cual es una contradicción. Así, de [I] y [II] obtenemos que $2^{n_0} \leq b < 2^{n_0+1}$. Luego $2^{n_0} - 2^{n_0} \leq b - 2^{n_0} < 2^{n_0+1} - 2^{n_0}$. Entonces $0 \leq b - 2^{n_0} < 2^{n_0}(2 - 1)$, con lo cual

$$0 \leq b - 2^{n_0} < 2^{n_0}$$

Por lo tanto, si consideramos la descomposición de $\left(b - 2^{n_0}\right)$ en potencias de *2*, obtenemos

$$b - 2^{n_0} = \sum_{n=0}^{n_0-1} b_n . 2^n \quad con\ b_n \in \{0, 1\}$$

De donde resulta que

$$b = 2^{n_0} + \sum_{n=0}^{n_0-1} b_n . 2^n \quad con\ b_n \in \{0, 1\}$$

2) Como $b = 2^{n_0} + \sum_{n=0}^{n_0-1} b_n . 2^n = 2^{n_0} + \sum_{n \in B} 1 . 2^n = 2^{n_0} + \sum_{n \in B} 2^n$ entonces

$$a . b = 2^{n_0} . a + \sum_{n \in B} 2^n . a \qquad \blacksquare$$

Un caso especial de multiplicación: la decuplicación y centuplicación

Gracias a que el sistema de numeración egipcio es un sistema decimal, podemos multiplicar por *10* (decuplicar) o por *100* (centuplicar) un número natural cualquiera, en base a la siguiente regla:

Para multiplicar por *10* un número, reemplazamos cada símbolo que compone el número por su símbolo inmediato superior.

Para multiplicar por *100* un número, reemplazamos cada símbolo que compone el número por el símbolo que le sigue a su inmediato superior.

Ejemplo 3.7

---

1) Multiplicar por *10* el número *64.*

2) Multiplicar por *100* el número *325.*

Solución

1) La representación de *64* en el sistema egipcio es

Luego, para multiplicar por *10*, sustituimos los cuatro bastones por cuatro asas y las seis asas por seis espirales. De este modo, resulta

Luego, el resultado de la multiplicación es *640*.

2) La representación de *325* en el sistema egipcio es

Luego, para multiplicar por *100* sustituimos los cinco bastones por cinco espirales, las dos asas por dos flores de loto y los tres espirales por tres dedos. Por lo tanto, obtenemos

Luego, el resultado de la multiplicación es *32500*.

La División en el Sistema Egipcio

El método que aplicaban los egipcios para dividir números naturales también se pudo conocer gracias al Papiro de Rhind.
Al igual que la multiplicación, la división se consigue empleando sólo sumas y duplicaciones. Es decir, no es necesario conocer las tablas de multiplicar. Esto otorga al algoritmo una gran ventaja en relación al algoritmo de división que conocemos. Primeramente explicaremos su procedimiento mostrando dos ejemplos, para luego justificar teóricamente el algoritmo.

Ejemplo 3.8

Calcular *179:23*.

Solución

Primer Paso:

Diseñamos una tabla con dos columnas. En la primera columna comenzamos con *1*, mientras que la segunda columna la inicializamos con el divisor, en este caso *23*. Vamos aplicando duplicaciones sucesivas de las dos columnas simultáneamente, hasta que en la segunda columna no se supere el valor del dividendo, en este caso *179*.

Doble	*Doble*	
1	*23*	
2	*46*	
4	*92*	
8	*184 (>179)*	*Terminar*

Segundo Paso:

Sumamos los números que figuran en la segunda columna, de abajo hacia arriba, hasta obtener el valor del dividendo (es decir, *179*) o bien el valor más cercano que sea menor que el dividendo.

Doble	*Doble*
1	*23*
2	*46*
4	*92*
	92+46+23=161

Luego, el cociente será la suma de los valores de la primera columna que se corresponden con los seleccionados de la segunda columna.
Es decir,

***Cociente**: 4+2+1 = 7*

Mientras que el resto será la diferencia entre el dividendo y la suma de los valores seleccionados de la segunda columna. O sea,

***Resto** = 179 – 161 = 18*.

Ejemplo 3.9

Calcular *4632:123*.

Solución

Elaboramos la siguiente tabla:

Doble	*Doble*	
1	*123*	
2	*246*	
4	*492*	
8	*984*	
16	*1968*	
32	*3936*	
64	*7872 (> 4632)*	*Terminar*

Ahora sumamos los números de la segunda columna, de abajo hacia arriba, hasta obtener el mayor valor que no supere el dividendo, que en este caso es *4632*. Dicha suma se compone de los valores de la segunda columna que se encuentran sombreados en la siguiente tabla:

Doble	*Doble*
1	*123*
2	*246*
4	*492*
8	*984*
16	*1968*
32	*3936*

Es decir

$$3936 + 492 + 123 = 4551.$$

Por lo tanto

Cociente: 32 + 4 + 1 = 37

Resto: 4632 – 4551 = 81

Observemos que, al efectuar la división de a por b, los elementos de la segunda columna de la tabla son de la forma $2^n . b$, con $n \in \mathbb{N}_0$ y tal que $2^n . b \leq a$. Antes de justificar teóricamente el algoritmo de la división egipcia, recordaremos el siguiente resultado:

Teorema 3.10: Algoritmo de la División Entera

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$ Entonces existen dos números enteros únicos q y r, llamados cociente y resto, que verifican:

1) $a = b\,q + r$ *2) $0 \leq r < |\,b\,|$*

Demostración: Véase Referencia [11].

Proposición 3.11: Justificación del Algoritmo egipcio de la división

Sean $a,b \in \mathbb{N}$ *con* $a > b$, $n_0 = max\left\{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 2^n . b \le a\right\}$ *y*

$$C = \left\{n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b.n \le a\right\}$$

Sean

$$q = max\, C$$
$$r = a - b.q$$

Entonces

1) q y r son, respectivamente, el cociente y el resto de la división entera de a por b.
2) q y r verifican las siguientes expresiones:

$$q = 2^{n_0} + \sum_{n=0}^{n_0-1} q_n . 2^n \quad con\ q_n \in \{0,1\}$$

$$r = a - \left(2^{n_0} . b + \sum_{n=0}^{n_0-1} q_n . 2^n . b \right)$$

Demostración:

1) Aplicaremos el Teorema *3.10*. Para ello expresamos a del siguiente modo:

$$a = b.q + (a - b.q) \qquad [I]$$

Probemos que

$$0 \le a - b.q < b \qquad [II]$$

Como $q \in C$ entonces $b.q \le a$. Luego,

$$a - b.q \ge 0$$

Veamos ahora que $a - b.q < b$. Supongamos por el absurdo que $a - b.q \ge b$. Entonces

$$a \ge b + b.q .$$

Es decir,

$$b.(q+1) \le a .$$

Luego $(q+1) \in C$, con lo cual

$$(q+1) \le max\, C$$

O sea,

$$(q+1) \le q$$

De aquí obtenemos que $1 \le 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto

$$a - b.q < b$$

De [I] y [II] deducimos, por el Teorema *3.10*, que q y r son el cociente y el resto de la división entera entre a y b.

2) Observemos que

$$q \ge 2^{n_0} \qquad [III]$$

Pues si suponemos por el absurdo que

$$q < 2^{n_0}$$

Entonces

$$q \leq 2^{n_0} - 1$$

Luego

$$q + 1 \leq 2^{n_0}$$

De aquí resulta que

$$(q+1).\, b \leq 2^{n_0}.\, b \leq a\,.$$

Es decir,

$$(q+1).\, b \leq a\,.$$

Por lo tanto $(q+1) \in C$ .Pero esto es una contradicción ya que $q = max\, C$.

Por otro lado,

$$q < 2^{n_0+1} \qquad \text{[IV]}$$

Pues si suponemos nuevamente por el absurdo que

$$2^{n_0+1} \leq q$$

Entonces

$$b.\, 2^{n_0+1} \leq b.\, q \leq a$$

Es decir,

$$2^{n_0+1}.\, b \leq a$$

De aquí resulta que

$$(n_0 + 1) \in \left\{ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 2^n.\, b \leq a \right\}$$

Por lo tanto

$$(n_0 + 1) \leq max \left\{ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } 2^n.\, b \leq a \right\}.$$

O sea,

$$n_0 + 1 \leq n_0$$

Lo cual es una contradicción. Luego, de [III] y [IV] tenemos que $2^{n_0} \leq q < 2^{n_0+1}$. Es decir,

$$0 \leq q - 2^{n_0} < 2^{n_0}$$

En consecuencia, si consideramos la descomposición de $\left(q - 2^{n_0}\right)$ en potencias de *2*, obtenemos

$$q - 2^{n_0} = \sum_{n=0}^{n_0-1} q_n.\, 2^n \;\; con\; q_n \in \{0\,,\, 1\}$$

Es decir

$$q = 2^{n_0} + \sum_{n=0}^{n_0-1} q_n.\, 2^n \;\; con\; q_n \in \{0\,,\, 1\}$$

La expresión del resto *r* se deduce de la igualdad anterior. ■

Las fracciones egipcias

En Egipto, las fracciones surgieron con la finalidad de resolver problemas de reparto. Es decir, fueron creadas debido a que los escribas se vieron en la necesidad de buscar la forma de representar los resultados de tareas tales como repartos equitativos de pan o cerveza, o determinar en qué proporción se deben mezclar distintos tipos de alimento para el ganado y aves domésticas.

La limitación principal del sistema de fracciones egipcio es que no existen fracciones generales como las nuestras. Sólo aparecen ***fracciones unitarias***, que corresponden a lo que nosotros denotaríamos por

$$\frac{1}{n} \quad con \quad n \in \mathbb{N}$$

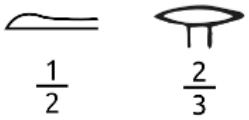
Además de una fracción especial que para nosotros representa ***2/3***.

Las fracciones unitarias son también llamadas ***cuantavos.*** De este modo, todos los resultados de los cálculos fraccionarios deben ser expresados en términos de cuantavos o de la fracción *2/3*.

Para representar las fracciones unitarias, los egipcios utilizaban un símbolo similar a un ojo, que significa "*parte*", y debajo de él iba el número asociado al denominador.

Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{12}$ sería

Además de esta regla general para escribir cuantavos, existían también dos símbolos para representar las fracciones *1/2* y *2/3*, que son los siguientes:



Como mencionamos anteriormente, en este sistema no existen fracciones ***con numeradores distintos a 1***. Es decir, fracciones de la forma

$$\frac{m}{n} \quad con \quad m \neq 1$$

Veamos qué tipo de operaciones se podían realizar con estas fracciones.

Operaciones con fracciones egipcias

Las operaciones con fracciones que el Sistema Egipcio permite realizar son las siguientes:

Producto de un número natural por un cuantavo:

$$m \times \frac{1}{n} \quad con \quad m\ , n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

Producto de un número natural por 2/3:

$$m \times \frac{2}{3} \quad con \quad m \ \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

Producto de dos cuantavos:

$$\frac{1}{m}\times\frac{1}{n} \quad con \;\; m\,,\, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

Producto entre 2/3 y un cuantavo:

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{n} \quad con \;\; n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

Producto entre 2/3 y 2/3:

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$$

Suma o Resta de dos cuantavos

$$\frac{1}{m}\pm\frac{1}{n} \quad con \;\; m\,,\, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

Suma o Resta entre 2/3 y un cuantavo

$$\frac{2}{3}\pm\frac{1}{n} \quad con \;\; n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

Suma entre 2/3 y 2/3:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$

El resultado de estas operaciones queda expresado en términos de fracciones unitarias o de la fracción *2/3*.

Notación 3.12

Si empleamos la aritmética actual, sabemos que el producto de un número natural mayor que *1* por un cuantavo es una fracción con numerador distinto de *1*. Es decir, si $m\,,\, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ entonces

$$m\times\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

Si bien sabemos que en Egipto no existían fracciones con numerador distinto de *1*, en este trabajo identificaremos la expresión $m\times\frac{1}{n}$ con la fracción $\frac{m}{n}$.

Ejemplo 3.13

La fracción $\frac{5}{12}$, que significa efectuar la operación $5\times\frac{1}{12}$, puede expresarse como:

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{3}+\frac{1}{12} =$$

En algunos casos suele ser complicado encontrar fracciones unitarias para representar el resultado de ciertas operaciones entre fracciones. Otro problema añadido es que a menudo existe más de una posible representación para una misma operación fraccionaria. Por ejemplo la fracción *2/5* puede expresarse como:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5}+\frac{1}{5} =$$

O también como

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} =$$

En este contexto, cabe preguntarnos: ¿Qué fue lo que motivó a los egipcios a trabajar solamente (salvo *2/3*) con fracciones unitarias? Si bien los historiadores no dan una respuesta unánime, la mayoría se inclina a pensar que para ellos bastaba definir este tipo de fracciones debido al modo con que los escribas repartían equitativamente. El siguiente ejemplo, que corresponde al *Problema N° 6* del Papiro de Rhind, corrobora esta afirmación.

Ejemplo 3.14

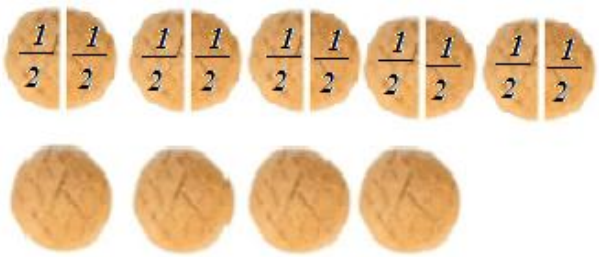
Repartir en forma equitativa *9* panes entre *10* personas.

Solución

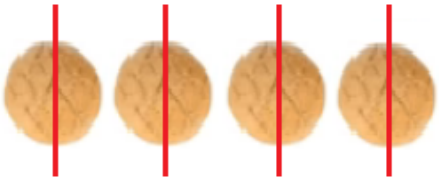
Nosotros sabemos, por la manera en que operamos aritméticamente en la actualidad, que si tenemos que repartir *9* panes entre *10* personas, cada persona recibirá $\frac{9}{10}$ de pan.

Es decir que una solución del problema sería dividir cada pan en *10* partes y dar *9* trozos a cada persona. Pero esto es una solución poco práctica, porque le estaríamos dando a cada persona *9* trozos pequeños de un pan, que pronto se pondrán duros y no se podrán comer. Así que habría que buscar una mejor solución. En el Papiro de Rhind este problema se resuelve así:

Primero tomamos *5* panes y los dividimos por la mitad:



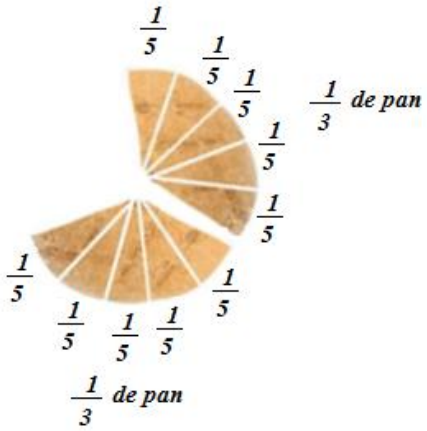
Ahora tenemos diez medios panes y por lo tanto podemos dar medio pan a cada una de las personas. Luego, cada persona recibe, por el momento, $\frac{1}{2}$ de pan. Tomamos ahora los *4* panes restantes. Si los partiéramos por la mitad, tendríamos *8* trozos, con lo cual no son suficientes para dar un trozo a cada uno.



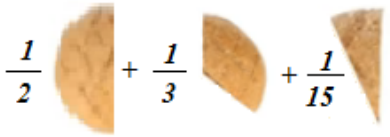
Así que hay que partirlo en trozos más pequeños. Los partimos entonces en tercios:

De este modo, tenemos *12* partes, y podemos dar una parte a cada persona. Así, hasta el momento, cada persona recibe *1/2* de pan de antes y *1/3* de pan de ahora. Es decir, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ de pan. Nos quedan por repartir $\frac{2}{3}$ de pan:

La única manera de repartir estos trozos entre *10* personas es partiendo cada uno de los trozos en *5* partes iguales. Si dividimos *1/3* en *5* partes iguales obtenemos $\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$ de pan.



Por lo tanto ya podemos repartir un trozo más a cada persona. Así, cada persona ha recibido *1/2* de pan, más *1/3* de pan, más *1/15* de pan. Es decir,



Como podemos comprobar, la técnica que utilizaban los egipcios para repartir era sencilla: se trata de ir partiendo los panes en trozos lo más grandes posibles pero cada vez más pequeños.

Observemos que

$$\frac{9}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

Luego, la fracción $\frac{9}{10}$ quedó expresada como suma de fracciones unitarias. La forma de resolver este problema, asociado a la forma de repartir que tenían los escribas, prueba porqué en Egipto bastaba trabajar con fracciones unitarias.

A continuación enunciaremos las propiedades que aplicaban los escribas egipcios para operar con fracciones. Si bien no aparecen escritas en ningún documento egipcio, el procedimiento utilizado para resolver los problemas del Papiro de Rhind nos permite deducir que estas propiedades las conocían implícitamente.

Propiedad 3.15: Reglas egipcias para operar con fracciones

Sean $a, b, m, n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

1) Si $a \geq b$ *entonces*

$$a \times \frac{1}{b} = q + r \times \frac{1}{b}$$

Donde

q: cociente de la división entre a y b.

r: resto de la división entre a y b.

2) $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{m \times n}$

4) Si n es par entonces $2 \,.\, \frac{1}{n} = \frac{1}{n:2}$

5) $\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m \text{ veces}} = m \,.\, \frac{1}{n}$ *. En particular, si m = n entonces* $m \times \frac{1}{m} = 1$

6) Identidad Notable: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

7) Corolario de la Identidad Notable: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

Además, en los textos egipcios aplicaban permanentemente la Propiedad Conmutativa y Asociativa de la suma y del producto, como así también la Propiedad Distributiva del producto con respecto a la suma. En cuanto a la suma de fracciones con diferente denominador, en la actualidad existen varias hipótesis que explican cómo realizaban esta operación. Pero no nos detendremos a analizarlas, ya que escapan al objetivo de este trabajo.

Ejemplo 3.16

Aplicando el método utilizado por los escribas egipcios, efectuar las siguientes operaciones y mostrar el resultado en símbolos egipcios.

a) $85 \times \frac{1}{7}$ b) $11 \times \frac{2}{3}$

Solución

1) Por el inciso *1*) de la Propiedad *3.15*, tenemos que

$$85 \times \frac{1}{7} = q + r \times \frac{1}{7}$$

Donde *q* y *r* son, respectivamente, el cociente y el resto de la división entre *85* y *7*.

Calculamos entonces *85:7*, elaborando la siguiente tabla:

Doble	*Doble*	
1	*7*	
2	*14*	
4	*28*	
8	*56*	
16	*112 (> 85)*	*Terminar*

Por lo tanto

$$q = 8 + 4 = 12$$
$$r = 85 - (56+28) = 1$$

Luego $85 \times \frac{1}{7} = 12 + \frac{1}{7} \times 1 =$ —. En general, omitiremos el signo "+" y escribiremos

$$\frac{1}{7} \cdot 85 = 12 \frac{1}{7}$$

Este resultado expresado en símbolos egipcios es

2) Nuevamente, por los incisos 1), 2) y 3) de la Propiedad *3.15*, y aplicando además la Propiedad Asociativa y Conmutativa del producto, resulta

$$\frac{2}{3} \times 11 = 2 \times \frac{1}{3} \times 11 = 2 \times 11 \times \frac{1}{3} = 22 \times \frac{1}{3} = q + r \times \frac{1}{3}$$

Donde *q* y *r* son, respectivamente, el cociente y el resto de la división entre *22* y *3*.

Calculamos entonces *22:3* elaborando la siguiente tabla:

Doble	*Doble*	
1	*3*	
2	*6*	
4	*12*	
8	*24 (> 22)*	*Terminar*

Por lo tanto

$$q = 4 + 2 + 1 = 7$$
$$r = 22 - (12+6+3) = 1$$

Entonces $11 \times \frac{2}{3} = 7 + 1 \times \frac{1}{3} = 7 + \frac{1}{3}$. Es decir

$$\frac{2}{3} \cdot 11 = 7 \ \frac{1}{3}$$

Que expresado en símbolos egipcios es

Ejemplo 3.17

Calcular, según el Sistema Egipcio, $\left(16 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{5}$

Solución

Haremos este cálculo tal como lo hacían los escribas egipcios. Primeramente diseñamos una tabla con dos columnas. En la primera columna comenzamos con *1*, mientras que la segunda columna la inicializamos con el primer factor, en este caso $16 + \frac{1}{3}$, omitiendo el signo "+". Luego multiplicamos la primera fila por el segundo factor, en este caso $\frac{1}{5}$.

			Técnica
1	16	$\frac{1}{3}$	*Inicialización*
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \times 16$	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$	*Multiplicar la primera fila por 1/5*

Ejecutamos ahora los siguientes cálculos:

Cálculo de $\frac{1}{5} \times 16$

Por el inciso *1*) de la Propiedad *3.15*, tenemos que

$$\frac{1}{5} \times 16 = q + r \times \frac{1}{5}$$

Donde *q* y *r* son, respectivamente, el cociente y el resto de la división entre *16* y *5*.

Calculamos *16:5*, elaborando la siguiente tabla:

Doble	*Doble*	
1	*5*	
2	*10*	
4	*20 (>16)*	*Terminar*

Por lo tanto

$$q = 2 + 1 = 3$$
$$r = 16 - (10+5) = 1$$

Luego $16 \times \frac{1}{5} = 3 + 1 \times \frac{1}{5} = 3 + \frac{1}{5} = 3\ \frac{1}{5}$.

Cálculo de $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$

Por el inciso *3*) de la Propiedad *3.15*, tenemos que $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

Sustituyendo estos resultados en la primera tabla, resulta

1	*16*	*1/3*
1/5	*3 1/5*	*1/15* ← *Resultado final*

Por lo tanto

$$\left(16 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{5} = 3 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$$

Que expresado en símbolos egipcios es

Cómo descomponían los egipcios una fracción propia en fracciones unitarias

En el lenguaje matemático actual, entendemos por fracción propia a una fracción de la forma

$$\frac{m}{n} \quad con \quad m < n$$

Como mencionamos anteriormente, esta fracción proviene de efectuar, en el Sistema Egipcio, la operación $m \times \frac{1}{n}$. Hasta el día de hoy, los egiptólogos no se ponen de acuerdo acerca del método que emplearon los escribas para representar estas fracciones como suma de fracciones unitarias. Recordemos, además, que dicha representación no es única. Una de las teorías más aceptadas en relación a este tema es la de R.J. Gillings (véase Referencia [14]). Dicha teoría describe *5* Principios básicos que podrían haber sido usados por los escribas a la hora de elegir la suma de fracciones más idónea, y son los siguientes:

1. De las posibles igualdades, la que tenga denominadores más pequeños es preferible, sin exceder ninguno el número *1000*.

2. Una igualdad con *2* términos es preferible a una con *3*; una con *3* a una con *4* y jamás se usan igualdades en las que aparezcan más de *4* fracciones.

3. Las fracciones se escriben en orden ascendente de denominador y nunca se repite la misma dos veces.

4. La primera fracción marca la elección, esto es, de todas las igualdades posibles, se escoge la que tenga el primer denominador más pequeño; salvo que el coger una con el denominador más grande implique una reducción sustancial en los posteriores denominadores.

5. Son preferibles denominadores con números pares a aquellos con números impares.

Es importante remarcar que en esta descomposición no se admiten fracciones repetidas. Así, *2/5* se escribe como *1/3 + 1/15* y no como *1/5 + 1/5*.
Mostraremos un ejemplo para ilustrar cómo, con la aritmética actual y aplicando estos principios, es posible expresar una fracción propia como suma de fracciones unitarias. El método que aplicaremos se conoce como el Algoritmo de Sylvester.

Ejemplo 3.18

Teniendo en cuenta los principios enunciados por R.J. Gillings, expresar las siguientes fracciones como suma de fracciones unitarias.

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{2}{9}$

Solución

a) Comparamos $\frac{4}{5}$ con $\frac{1}{2}$, que es la primera fracción unitaria. Como

$$\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$$

Pues *8 > 5*, entonces podemos realizar la sustracción:

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

De aquí resulta que

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \qquad [I]$$

Ahora, $\frac{3}{10}$ no es fracción unitaria. Comparamos $\frac{3}{10}$ con $\frac{1}{3}$, que es la siguiente fracción unitaria. Como

$$\frac{3}{10} < \frac{1}{3}$$

Pues *9 < 10*, no podemos efectuar la resta. Buscamos la siguiente fracción unitaria. Comparamos entonces $\frac{3}{10}$ con $\frac{1}{4}$. Como

$$\frac{3}{10} > \frac{1}{4}$$

Pues *12 > 10*, luego podemos efectuar la resta:

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

Por lo tanto

$$\frac{3}{10}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20} \qquad \text{[II]}$$

Sustituyendo [II] en [I] obtenemos la descomposición en fracciones unitarias:

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

b) Mostraremos dos opciones para hallar la descomposición.

Primera Opción

La primera fracción unitaria que es mayor a $\frac{2}{9}$ es $\frac{1}{5}$, pues *10 > 9*. Luego efectuamos la resta

$$\frac{2}{9}-\frac{1}{5}=\frac{1}{45}$$

Por lo tanto

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45} \qquad \text{[III]}$$

Segunda Opción

La segunda fracción unitaria que es mayor a $\frac{2}{9}$ es $\frac{1}{6}$, pues *12 > 9*. Luego efectuamos la resta

$$\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

Entonces

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18} \qquad \text{[IV]}$$

Comparando las expresiones [III] y [IV], vemos que la Segunda Opción es preferible a la Primera, pues:
Ambas opciones verifican los Principios *1*, *2* y *3*.
Teniendo en cuenta el Principio *4*, el denominador de la segunda fracción de la Primera Opción (*45*) es bastante mayor que el denominador de la Segunda Opción (*18*).
Sólo la Segunda Opción verifica el Principio *5*.

En consecuencia, la descomposición más idónea es

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$

Nota ilustrativa

Recién en el año *1202 d.C.* el matemático italiano Leonardo Pisano, más conocido como Fibonacci, pudo probar que toda fracción $\frac{a}{b}<1$ puede expresarse como suma de fracciones unitarias distintas.

La Tabla 2/n del Papiro de Rhind

El escriba Ahmés, en su Papiro de Rhind, creó una pequeña Tabla para la descomposición de fracciones de la forma *2/n* en suma de cuantavos, tomando *n* como los números impares desde el *3* hasta el *101*. No tiene sentido que las fracciones con denominador par se incluyan en la Tabla, pues basta aplicar el inciso *4*) de la Propiedad *3.16* para obtener una fracción unitaria. El conocimiento de esta tabla permite calcular fracciones con numeradores distintos de *2*.

Por ejemplo, para las fracciones $\frac{3}{n}$, basta con sumar $\frac{2}{n}+\frac{1}{n}$. Para las $\frac{4}{n}$ se multiplica por *2* el valor de $\frac{2}{n}$. Para las $\frac{5}{n}$, se suma $2\times\frac{2}{n}+\frac{1}{n}$. Y así sucesivamente. En la siguiente tabla mostramos las descomposiciones de las fracciones *2/n.*

Tabla 2/n

Fracción	***Descomposición***	***Fracción***	***Descomposición***
2/3	*2/3*	*2/53*	*1/30+1/318+1/795*
2/5	*1/3+1/15*	*2/55*	*1/30+1/330*
2/7	*1/4+1/28*	*2/57*	*1/38+1/114*
2/9	*1/6+1/18*	*2/59*	*1/36+1/236+1/531*
2/11	*1/6+1/66*	*2/61*	*1/40+1/244+1/488+1/610*
2/13	*1/8+1/52+1/104*	*2/63*	*1/42+1/126*
2/15	*1/10+1/30*	*2/65*	*1/39+1/195*
2/17	*1/12+1/51+1/68*	*2/67*	*1/40+1/335+1/536*
2/19	*1/12+1/76+1/114*	*2/69*	*1/46+1/138*
2/21	*1/14+1/42*	*2/71*	*1/40+1/568+1/710*
2/23	*1/12+1/276*	*2/73*	*1/60+1/219+1/292+1/365*
2/25	*1/15+1/75*	*2/75*	*1/50+1/150*
2/27	*1/18+1/54*	*2/77*	*1/44+1/308*
2/29	*1/24+1/58+1/174+1/232*	*2/79*	*1/60+1/237+1/316+1/790*
2/31	*1/20+1/124+1/155*	*2/81*	*1/54+1/162*
2/33	*1/22+1/66*	*2/83*	*1/60+1/332+1/415+1/498*
2/35	*1/30+1/42*	*2/85*	*1/51+1/255*
2/37	*1/24+1/111+1/296*	*2/87*	*1/58+1/174*

Fracción	*Descomposición*	*Fracción*	*Descomposición*
2/39	*1/26+1/78*	*2/89*	*1/60+1/356+1/534+1/890*
2/41	*1/24+1/246+1/328*	*2/91*	*1/70+1/130*
2/43	*1/42+1/86+1/129+1/301*	*2/93*	*1/62+1/186*
2/45	*1/30+1/90*	*2/95*	*1/60+1/380+1/570*
2/47	*1/30+1/141+1/470*	*2/97*	*1/56+1/679+1/776*
2/49	*1/28+1/196*	*2/99*	*1/66+1/198*
2/51	*1/34+1/102*	*2/101*	*1/101+1/202+1/303+1/606*

Ejemplo 3.19

Aplicando la Tabla *2/n*, calcular

a) $8 \times \frac{1}{9}$ b) $5 \times \frac{1}{13}$

Solución

a) Recurriendo a la Tabla *2/n* y teniendo en cuenta el inciso *4*) de la Propiedad *3.15*, obtenemos

$$8 \cdot \frac{1}{9} = 2 \times \left(2 \times \left(2 \times \frac{1}{9} \right) \right) = 2 \times \left(2 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{18} \right) \right) = 2 \times \left(2 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{18} \right) = 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) =$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) = 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

Por lo tanto

$$8 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

b) Nuevamente recurrimos a la Tabla *2/n* y al inciso *4*) de la Propiedad *3.15*. Entonces

$$5 \times \frac{1}{13} = (2 \times 2 + 1) \times \frac{1}{13} = \left(2 \times 2 \times \frac{1}{13} \right) + \frac{1}{13} = 2 \times \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} \right) + \frac{1}{13} =$$

$$= 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{52} + 2 \times \frac{1}{104} + \frac{1}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52} + \frac{1}{13}$$

Luego

$$5 \times \frac{1}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{26} + \frac{1}{52} + \frac{1}{13}$$

La Tabla de multiplicación de 2/3 del Papiro de Rhind

Con mucha frecuencia los egipcios multiplicaban fracciones. En el Papiro de Rhind, el escriba Ahmés registró algunos productos, quizás los más utilizados, entre *2/3* y *2/3* o entre *2/3* y un cuantavo, expresando el resultado en términos de fracciones unitarias. En la siguiente tabla mostramos un fragmento de estos productos.

Tabla de productos de 2/3

Producto	***Resultado***	
2/3 de 2/3	*1/3*	*1/9*
2/3 de 1/3	*1/6*	*1/18*
2/3 de 1/5	*1/10*	*1/30*
2/3 de 1/6	*1/12*	*1/36*
2/3 de 1/2	*1/3*	
2/3 de 1/8	*1/12*	
2/3 de 1/9	*1/18*	*1/54*
2/3 de 1/7	*1/14*	*1/42*
2/3 de 1/11	*1/22*	*1/66*

Principales técnicas aplicadas por los escribas para operar con fracciones

A fin de agilizar las cuentas y aprovechar las tablas de multiplicar prediseñadas, como la *Tabla 2/n* y la *Tabla de productos de fracciones*, los escribas utilizaban ciertas técnicas que mencionamos a continuación:

1. Desdecuplicación

Es la recíproca de la decuplicación. Desdecuplicar un número *m* consiste en dividir dicho número por *10*. Es decir, calcular

$$\frac{1}{10}\times m$$

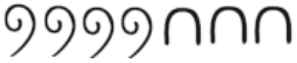
Si en la expresión del número *m* no figuran los símbolos que representan las unidades (es decir, los bastones), la desdecuplicación se logra reemplazando cada símbolo que compone el número por su símbolo inmediato inferior.

Ejemplo 3.20

Calcular $\frac{1}{10}\times 430$

Solución

La representación de *430* en el sistema egipcio es



En la representación de *430* no figuran bastones. Luego, para dividir por *10*, sustituimos los *4* espirales por *4* asas y las *3* asas por *3* bastones. Así, obtenemos

Luego, el resultado es *43*.

2. Descentuplicación

Es la recíproca de la centuplicación. Descentuplicar un número *m* consiste en dividir dicho número por *100*. Es decir, calcular

$$\frac{1}{100} \times m$$

Si en la expresión del número *m* no figuran los símbolos que representan las unidades (es decir, los bastones) ni las decenas (las asas), la descentuplicación se logra reemplazando cada símbolo que compone el número por el símbolo anterior a su inmediato inferior.

3. Desduplicación

Es la recíproca de la duplicación. Desduplicar un número *m* significa dividir dicho número por *2*. Es decir, consiste en calcular

$$\frac{1}{2} \times m$$

La Desduplicación era para los egipcios una de las operaciones más sencillas, y por esta razón la empleaban muy a menudo. Para efectuar esta operación utilizaban la *Tabla de Duplicación* (para nosotros, la *Tabla del 2*) de números comprendidos entre *1* y 5*0*, como se muestra a continuación:

Tabla de Duplicación

n	***2 n***
1	*2*
2	*4*
3	*6*
4	*8*
5	*10*
---	---
48	*96*
49	*98*
50	*100*

En el siguiente ejemplo mostraremos cómo efectuaban las desduplicaciones.

Ejemplo 3.21

Aplicar la *Técnica de Desduplicar* para resolver las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{2}\times 97$ b) $\frac{1}{2}\times 8$ c) $\frac{1}{2}\times 897$

Solución

a) En la segunda columna de la *Tabla de Duplicación*, buscamos el número *97* o bien el mayor número que no supere *97*. En este caso, como el *97* no figura en la segunda columna, el mayor número que no supera 97 es *96*. El número asociado a *96* que aparece en la primera columna es *48*. Por lo tanto

$$\frac{1}{2}\times 97 = 48 + \frac{1}{2}$$

b) En la segunda columna de la *Tabla de Duplicación*, buscamos el número *8* o bien el mayor número que no supere *8*. Como el *8* figura en la segunda columna, su número asociado a la primera columna es *4*. Por lo tanto

$$\frac{1}{2}\times 8 = 4$$

c) Descomponemos el número *897*, separando las unidades y decenas de las centenas, a fin de aplicar la *Tabla de Duplicación* y la *técnica de descentuplicación*:

$$\frac{1}{2}\times 897 = \frac{1}{2}\times(800+97) = \frac{1}{2}\times 800 + \frac{1}{2}\times 97 = 100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{100}\times 800 + 48 + \frac{1}{2} =$$

$$= 100\times\frac{1}{2}\times 8 + 48 + \frac{1}{2} = 100\times 4 + 48 + \frac{1}{2} = 400 + 48 + \frac{1}{2} = 448 + \frac{1}{2}$$

En consecuencia

$$\frac{1}{2}\times 897 = 448 + \frac{1}{2}$$

4. Desduplicaciones sucesivas

El escriba lo aplicaba para calcular expresiones de la forma

$$\frac{1}{2^n}\times m \quad , con\ m,n \in \mathbb{N}$$

En este caso, se resuelve efectuando los siguientes cálculos, realizando las operaciones de derecha a izquierda:

$$\frac{1}{2^n}\times m = \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times....\times\frac{1}{2}}_{n\ veces}\times m$$

5. Desduplicar y Desdecuplicar

Es utilizado para resolver expresiones de la forma

$$\frac{1}{2^n\times 5}\times m \quad , con\ \ m,n \in \mathbb{N}$$

Si el número *m* carece del símbolo que representa la unidad, esta expresión se calcula del siguiente modo, efectuando las operaciones de derecha a izquierda:

$$\frac{1}{2^n \times 5} \times m = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times .... \times \frac{1}{2}}_{(n-1)\ veces} \times \frac{1}{10} \times m$$

6. La Técnica 2/3

Se aplica para calcular expresiones de la forma

$$\frac{1}{2^n \times 3} \times m \quad , con\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

En este caso, se resuelve también efectuando los cálculos de derecha a izquierda, de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2^n \times 3} \times m = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times .... \times \frac{1}{2}}_{(n+1)\ veces} \times \frac{2}{3} \times m$$

Por ejemplo, para calcular un tercio de un número, un escriba calcula primero los dos tercios de dicho número y después divide por dos.

Ejemplo 3.22

Calcular $\frac{1}{8} \times 30$

a) Aplicando la *Técnica de Desduplicación sucesiva*.
b) Sin aplicar dicha técnica.

Solución

a) Valiéndonos de la *Tabla de Duplicación* y del inciso *3*) de la Propiedad *3.15*, resulta:

$$\frac{1}{8} \times 30 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 30 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 15 = \frac{1}{2} \times \left(7 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times 7 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{8} \times 30 = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Obviamente, el escriba egipcio no empleaba la notación de la Aritmética actual. Él hubiera diseñado una tabla, disponiendo los datos y efectuando los cálculos del siguiente modo:

		Técnica
1	*30*	*Inicialización*
1/2	*15*	*Desduplicar la fila anterior*
1/4	*7 1/2*	*Desduplicar la fila anterior*
1/8	*3 1/2 1/4*	*Desduplicar la fila anterior* *Resultado final*

b) Aplicando el inciso *1*) de la Propiedad *3.15* tenemos que

$$\frac{1}{8}\times\ 30\ =3+6\times\frac{1}{8} \qquad \text{[I]}$$

Por otro lado, por el inciso *4*) de la Propiedad *3.15* resulta

$$6\times\frac{1}{8}=3\times\ 2\times\frac{1}{8}=3\times\frac{1}{4}=\left(2+1\right)\times\frac{1}{4}=2\times\frac{1}{4}+\ \frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\ \frac{1}{4}$$

Es decir

$$6\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\ \frac{1}{4} \qquad \text{[II]}$$

Reemplazando [II] en [I] obtenemos

$$\frac{1}{8}\times 30\ =3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

En este ejemplo podemos comprobar que la *Técnica de Desduplicación sucesiva* aplicada en el inciso a) es más eficiente que la técnica aplicada en el inciso b), porque en el inciso b) se necesita efectuar primeramente la división *30:8*, lo cual demanda más tiempo.

Ejemplo 3.23

Calcular, aplicando las técnicas que considere conveniente, la siguiente expresión:

$$\frac{1}{6}\times\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)$$

Solución

Aplicamos la *Técnica 2/3*, considerando

$$\frac{1}{6}\times\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)$$

Suponiendo que somos escribas egipcios, elaboraremos la siguiente tabla, volcando los datos y resultados de las operaciones del siguiente modo:

							Técnica
1	*8*	*2/3*	*1/6*	*1/18*			*Inicialización*
2/3	*5*	*2/3*	*1/6*	*1/18*	*1/27*		*Dos tercios la fila anterior*
1/3	*2*	*1/2*	*1/3*	*1/12*	*1/36*	*1/54*	*Desduplicar la fila anterior*
1/6	*1*	*1/4*	*1/6*	*1/24*	*1/72*	*1/108*	*Desduplicar la fila anterior* *Resultado final*

Por lo tanto

$$\frac{1}{6}\times\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}+\frac{1}{108}$$

Cálculos auxiliares

Fila 2:

Aplicando los incisos *1*)-*5*) de la Propiedad *3.15*, la *Tabla 2/n* y la *Tabla de Productos de 2/3* obtenemos

$$\frac{2}{3}\times\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)=\frac{2}{3}\times 8+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{18}=2\times\frac{1}{3}\times 8+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{18}=$$

$$=16\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{18}=16\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}=$$

$$=5+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=5+\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=5+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}$$

Fila 3:

Aplicamos nuevamente los incisos *1*)-*5*) de la Propiedad *3.15* y la *Tabla 2/n*:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(5+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}\right)=\frac{1}{2}.5+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{18}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}=$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{54}$$

Fila 4:

Aplicamos el inciso *3*) de la Propiedad *3.15*:

$$\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{54}\right)=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{36}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{54}=$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}+\frac{1}{108}$$

Como podemos comprobar a través de los ejemplos expuestos, la aritmética del Antiguo Egipto se basa fundamentalmente en sumar, duplicar, dividir por la mitad y usar las tablas prediseñadas.

Finalizamos este capítulo con el siguiente ejemplo, que integra los conceptos adquiridos hasta ahora.

Ejemplo 3.24

Calcular, aplicando las técnicas que considere conveniente, la siguiente expresión:

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\times\left(30+\frac{1}{3}\right)$$

Solución

Como $\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\times\left(30+\frac{1}{3}\right)=\underbrace{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\times 30}_{\textit{Primer término}}+\underbrace{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{3}}_{\textit{Segundo término}}$

Entonces el escriba resuelve primero el primer término, luego el segundo término y finalmente suma ambos términos. Para ello organiza los datos y los cálculos en las siguientes tablas:

Primera Tabla: cálculo del primer término

						Técnica
1	*1*	*1/3*	*1/5*			*Inicialización*
2	*3*	*1/15*				*Duplicar la fila anterior*
4	*6*	*1/10*	*1/30*			*Duplicar la fila anterior*
8	*12*	*1/5*	*1/15*			*Duplicar la fila anterior*
16	*24*	*1/3*	*1/10*	*1/15*	*1/30*	*Duplicar la fila anterior*
Total primer término:	*45*	*2/3*	*1/5*	*1/10*	*1/30*	

Segunda Tabla: cálculo del segundo término

						Técnica
1	*1*	*1/3*	*1/5*			*Inicialización*
2/3	*2/3*	*1/6*	*1/18*	*1/10*	*1/30*	*Multiplicar por 2/3 la fila anterior*
1/2	*1/3*	*1/12*	*1/36*	*1/20*	*1/60*	*Desduplicar fila anterior*
Total segundo término:	*1/3*	*1/12*	*1/36*	*1/20*	*1/60*	

Los datos contenidos en estas tablas se pueden corroborar más abajo, en los Cálculos Auxiliares. Por lo tanto

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\times\left(30+\frac{1}{3}\right)=45+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}=$$

$$=46+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$$

Es decir

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\times\left(30+\frac{1}{3}\right)=46+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$$

Si nos valemos de la aritmética moderna, aplicando la Propiedad Distributiva del producto con respecto a la suma, junto con el producto y suma de fracciones, vemos que

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\times\left(30+\frac{1}{3}\right)=46+\frac{23}{45}$$

Este resultado efectivamente coincide con la aritmética utilizada en el Antiguo Egipto.

Cálculos auxiliares

Primera Tabla

Fila 2:

Aplicando el inciso *5*) de la Propiedad *3.15* y la *Tabla 2/n* obtenemos

$$2\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=2+2\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{5}=2+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=2+3\times\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=2+1+\frac{1}{15}=3+\frac{1}{15}$$

Fila 3:

Aplicamos la *Tabla 2/n*:

$$2\times\left(3+\frac{1}{15}\right)=2\times3+2\times\frac{1}{15}=6+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

Fila 4:

Utilizamos el inciso *4*) de la Propiedad *3.15:*

$$2\times\left(6+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)=2\times6+2\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{30}=12+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$$

Fila 5:

Utilizamos la *Tabla 2/n:*

$$2\times\left(12+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right)=2\times12+2\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{15}=24+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

Total primer término:

Sumamos los números de la segunda columna que se corresponden con las potencias de dos de la primera columna que sumamos para obtener *30*. Para ello aplicamos el inciso *4*) de la Propiedad *3.15* y la *Tabla 2/n*:

$$3+\frac{1}{15}+6+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+12+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+24+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=$$

$$=45+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=$$

$$=45+2\times\frac{1}{15}+2\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{30}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=45+2\times\frac{1}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=$$

$$=45+2\times\frac{1}{15}+2\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{15}+\frac{1}{3}=45+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{3}=$$

$$=45+2\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{30}+\frac{2}{3}+\frac{1}{15}=45+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{2}{3}+\frac{1}{15}=45+\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{15}+\frac{2}{3}=$$

$$=45+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{2}{3}$$

Segunda Tabla

Aplicamos la *Técnica 2/3*. Es decir, para calcular el segundo término procedemos así:

$$\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$$

Fila 2:

Aplicamos la *Tabla de productos de fracciones*:

$$\frac{2}{3}\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

Fila 3:

Aplicamos el inciso *3*) de la Propiedad *3.15* y la *Tabla de productos de 2/3*:

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{18}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{30}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$$

Nota ilustrativa: ¿Existía el cero en el Antiguo Egipto?

La civilización egipcia disponía también de un jeroglífico para representar un concepto similar a nuestro *cero* actual.
Sin embargo, este jeroglífico no formaba parte directamente del sistema de numeración egipcio. La aplicación principal del *cero* egipcio era en arquitectura, donde representaba el nivel base a partir del cual se indicaban los niveles de una construcción.
En general, había un nivel horizontal base a partir del cual se podían definir niveles positivos hacia arriba y negativos hacia abajo.
El jeroglífico para representar este concepto de cero era el mismo que se utilizaba para representar la palabra belleza.

Figura 3.3: Jeroglífico que representa el cero.

Capítulo 4
La Aritmética en Mesopotamia

Alrededor del año *3000* a.C. se produjo una corriente migratoria de pueblos procedentes de la Península Arábiga hacia la región bordeada por los ríos Éufrates y Tigris. Dichos pueblos se fusionaron con los sumerios y demás habitantes autóctonos, a punto tal que no existen vestigios de enfrentamientos entre ellos. La integración fue tan significativa, que dio lugar a la formación, en el año *2350* a.C., del primer imperio de la historia, llamado el Imperio de la Mesopotamia. Dicho imperio abarcaba los actuales países de Siria, Líbano, Irak, Jordania, Kuwait, Palestina y Chipre.

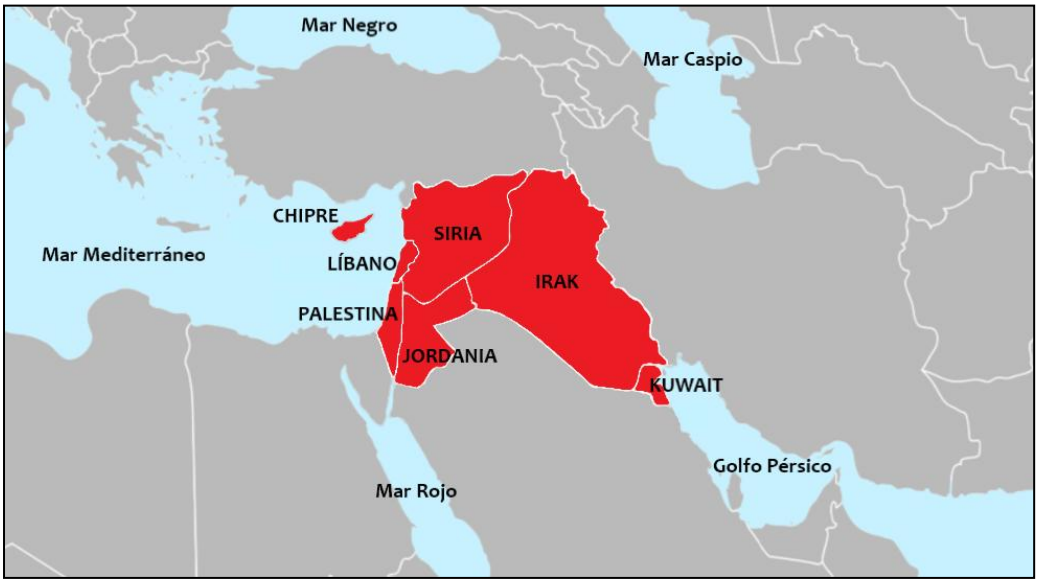


Figura 4.1: El Imperio de la Mesopotamia.

En ese entonces se habían inventado numerosos sistemas de símbolos para representar los números. Esto dificultaba enormemente las tareas administrativas a la hora de registrar los datos, debido a la vasta extensión del imperio. Para solucionar este problema, se decidió crear un único sistema de numeración formado por *60* símbolos distintos, llamado el *Sistema Sexagesimal*.

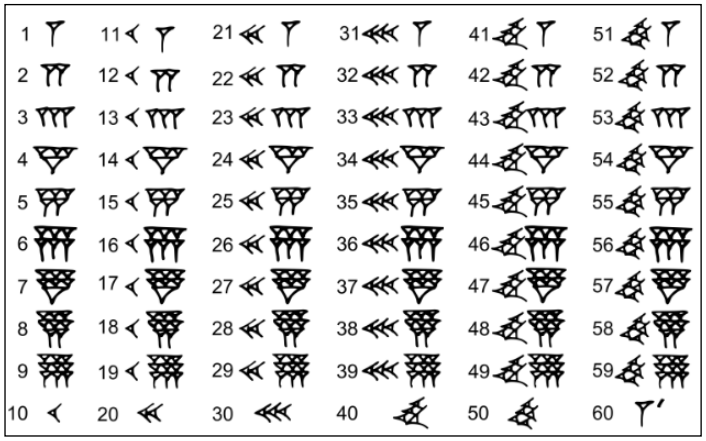
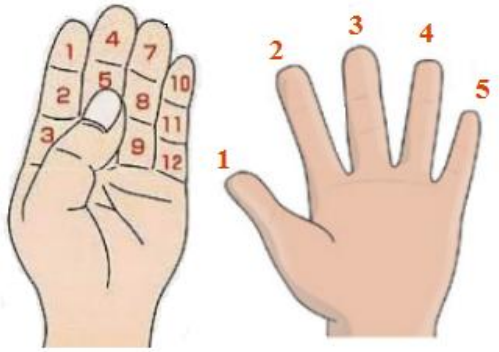


Figura 4.2: El Sistema Sexagesimal.

Al igual que el sistema egipcio, este sistema era originalmente ***no posicional*** y su escritura numérica era ***aditiva***. De este modo, se debía escribir tantas veces como fuera necesario algunos de los *60* símbolos, hasta alcanzar el número que se quería representar.

Pero: ¿por qué emplearon *60* símbolos para representar los números? La respuesta está en nuestras extremidades, que parecen haber inspirado el surgimiento de la numeración en casi todas las culturas. Efectivamente, los habitantes de Mesopotamia utilizaban el dedo pulgar para señalar las diferentes falanges de los cuatro dedos restantes de esa mano. Cuando habían contado todas las falanges, levantaban un dedo de la otra mano y volvían a comenzar. Así, con las dos manos podían contar hasta *60* utilizando las *12* falanges de una mano y los *5* dedos de la otra.



$12 \times 5 = 60$

Figura 4.3: Justificación de los 60 símbolos del Sistema Sexagesimal.
Fuente: http://www.uco.es/users/ma1fegan/Comunes/recursos-matematicos

El Sistema Sexagesimal babilónico

En el año *2100* a.C., en la ciudad de Ur (actual Irak), el *Sistema Sexagesimal* evoluciona para dar lugar al ***primer sistema de numeración posicional de la historia***: el *Sistema Sexagesimal Mesopotámico o Sistema Sexagesimal posicional*, llamado después ***Sistema Babilónico***. Las características de este sistema son las siguientes:

■ Está formado por los *59* símbolos del Sistema Sexagesimal (se elimina el símbolo *60*).

■ Para representar cualquier cifra, se utilizan sólo dos símbolos cuneiformes:

El clavo, que vale *1 unidad*:

La espiga, que vale *10 unidades*:

Además, en cada cifra, pueden aparecer a lo sumo *9* clavos y/o *5* espigas.

■ El valor de cada cifra o símbolo que forma parte del número queda determinado por la posición que ocupa dentro de él, y cada posición representa una potencia de *60*.

■ Si el número no tiene cifras asociadas a una determinada potencia de *60*, se deja un *espacio vacío* en esa posición. A ese espacio vacío los asiriólogos lo llamaron el *cero mesopotámico*.

La representación del cero como espacio vacío fue utilizada hasta el siglo II a.C.

A partir de esa fecha, el espacio vacío fue reemplazado por dos cuñas oblicuas.

Figura 4.4: Representación del cero en Mesopotamia, a partir del siglo II a.C.

La influencia del Sistema Sexagesimal posicional fue tan grande, que aún perduran huellas de él. Por ejemplo, al medir el tiempo, cuando decimos que *1* hora consta de *60* minutos y *1* minuto de *60* segundos. O al medir los ángulos, cuando dividimos el grado en *60* minutos y el minuto en *60* segundos.

Ejemplo 4.1

Dado el siguiente número expresado en Sistema Babilónico:

¿Qué número representa en el sistema decimal?

Solución

Los símbolos cuneiformes que componen el número representan las siguientes cifras:

21 *40* *3*

Por lo tanto, el número escrito en este sistema es:

$$3\times60^{0}+40\times60^{1}+21\times60^{2}=3+2400+75600=78003$$

Notación 4.2

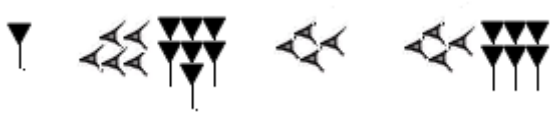
De acuerdo a la notación empleada por los asiriólogos y por cuestiones prácticas, representaremos los *59* símbolos cuneiformes del Sistema Babilónico mediante los símbolos

01, 02, 03,....., 10, 11,...., 57, 58, 59 ó *1, 2, 3,....., 10, 11,...., 57, 58, 59*

Mientras que el espacio vacío será simbolizado por *00* o bien por *0*.
Además, las cifras que componen un número expresado en dicho sistema estarán separadas entre sí por medio de dos puntos (**:**).

Ejemplo 4.3

Dado el siguiente número expresado en Sistema Babilónico:



Entonces, con la notación moderna, dicho número es *01:57:40:46*, que expresado en sistema decimal es

$$46\times60^{0}+40\times60^{1}+57\times60^{2}+1\times60^{3}=46+2400+205200+216000=423646$$

Ejemplo 4.4

Representar los siguientes números en el Sistema Babilónico:

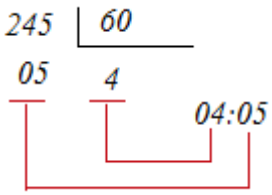
a) *245* b) *217354*

Solución

Antes de resolver los incisos, mostraremos cómo representar en Sistema Babilónico un número natural expresado en sistema decimal:

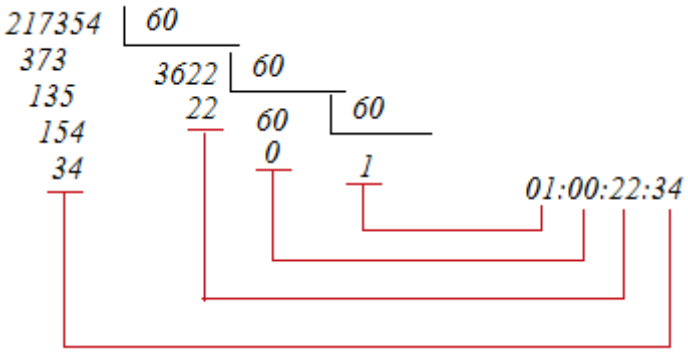
- Se divide por *60* el número expresado en sistema decimal.
- Se divide por *60* el cociente obtenido.
- Se repite el paso anterior hasta obtener un cociente menor que el divisor, que es *60*.
- Este último cociente, junto con los restos de las divisiones efectuadas constituyen, en ese orden, la representación sexagesimal del número.

a) Efectuamos la división entre *245* y *60*:



Por lo tanto, *245* expresado en Sistema Babilónico es *04:05*. Su representación en símbolos cuneiformes es

b) Efectuamos la división entre *217354* y *60*:



Luego, *217354* expresado en Sistema Babilónico es *01:00:22:34*. Su representación en símbolos cuneiformes es

A continuación mostraremos cómo los escribas mesopotámicos efectuaban las operaciones aritméticas básicas. Veremos que los procedimientos que utilizaban eran muy similares a los que empleamos en la actualidad. De hecho, los algoritmos que aplicamos para la suma, resta y multiplicación fueron heredados del Sistema

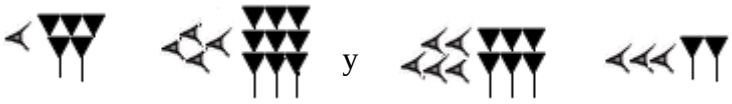
Sexagesimal posicional. A diferencia del Sistema Egipcio, en el Sistema Babilónico no existían símbolos especiales para las operaciones aritméticas de suma o resta.

La Suma en el Sistema Sexagesimal Babilónico

Para sumar dos o más números, los escribas mesopotámicos ubicaban un número debajo del otro, de modo tal que las cifras asociadas a la misma potencia de *60* queden ubicadas en la misma columna. El siguiente ejemplo ilustrará el procedimiento a seguir.

Ejemplo 4.5

Dados los siguientes números expresados en sistema babilónico:

 y

a) ¿Qué números representan en nuestro sistema?
b) Sumar ambos números con el método babilónico.

Solución

a)
Primer número:

15 *49*

Por lo tanto, el número escrito en sistema babilónico es *15*:*49*, es decir,

$$49 \times 60^0 + 15 \times 60^1 = 949$$

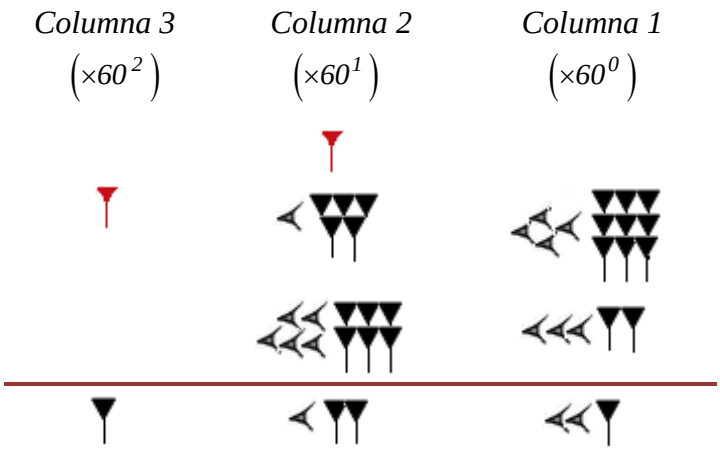
Segundo número:

56 *32*

Luego, el número escrito en sistema babilónico es *56*:*32*, es decir,

$$32 \times 60^0 + 56 \times 60^1 = 3392$$

b) Luego de sumar dichos números, trazamos una línea divisoria, debajo de la cual se escribirá el resultado de la operación. Tal como lo hacemos para sumar en nuestro sistema, efectuamos las sumas parciales de cada columna comenzando con la situada más a la derecha:



Columna 1:

49 + 32 = 81 = ***1*** *× 60 + 21*. Se pone *21* y se lleva ***1***.

Columna 2:

15 + 56 + ***1*** (que se llevaba) = *72 =* ***1*** *× 60 + 12*. Se pone *12* y se lleva ***1***.

Columna 3:

Sólo se suma el ***1*** acarreado de la Columna *2*.

Por lo tanto, el resultado de la suma es *01:12:21*, que expresado en nuestro sistema decimal es:

$$21 \times 60^0 + 12 \times 60^1 + 1 \times 60^2 = 4341$$

Como veremos cuando expliquemos la multiplicación en Sistema Sexagesimal, los escribas mesopotámicos empleaban un ábaco para efectuar las operaciones aritméticas básicas.

La Resta en el Sistema Sexagesimal Babilónico

La metodología que empleaban para restar era también similar a la de nuestro sistema, como podemos verificar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.6

Dado el siguiente número expresado en Sistema Babilónico:

Restarle el número

Solución

De acuerdo a la notación sexagesimal moderna, la operación a realizar es

12:15:05 – 12:14

Para ello ubicamos el minuendo y el sustraendo del siguiente modo:

	Columna 3 $(\times 60^2)$	Columna 2 $(\times 60^1)$	Columna 1 $(\times 60^0)$
		14	***65***
—	*12*	~~*15*~~	~~*05*~~
		12	*14*
	12	*02*	*51*

Columna 1:

Como *05* es menor que *14*, pedimos "*1* unidad" a la cifra que se encuentra en la columna inmediata anterior (Columna *2*, llamada *sesentena*), con lo cual la cifra del minuendo de la Columna *1* queda en $1\times 60^1 + 05 = 65$. Así, $65 - 14 = 51$.

Columna 2:

$14 - 12 = 2$

Columna 3:

$12 - 0 = 12$

Por lo tanto, $12:15:05 - 12:14 = 12:02:51$, que en nuestro sistema decimal es

$$51\times 60^0 + 02\times 60^1 + 12\times 60^2 = 43371$$

La Multiplicación en el Sistema Sexagesimal Babilónico

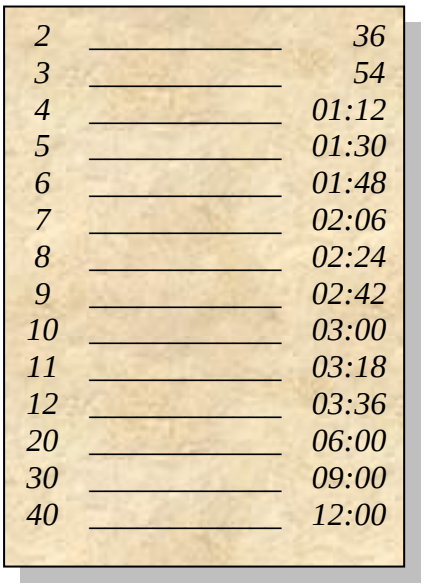
La base en la que se apoya el algoritmo de la multiplicación, al igual que otros algoritmos para sistemas posicionales, es el conocimiento de las tablas de multiplicar de todas las cifras que componen el sistema sexagesimal. En consecuencia, los escribas mesopotámicos, para poder realizar una multiplicación, tenían que conocer las tablas de multiplicar de los números entre *1* y *59*. Pero no se aprendían estas tablas de memoria, sino que las escribían en pequeñas tablillas de arcilla. La tabla de multiplicar de cada uno de estos números consistía en multiplicar, a priori, dicho número por las *59* cifras del sistema, es decir, del *1* al *59*. Aunque en realidad cada tabla sólo incluía la multiplicación por los números del 2 al *12*, por *20*, *30*, *40* y *50*. La siguiente figura muestra una de estas tablillas, de tan sólo *5.8* cm. de alto por *4.5* cm. de ancho.

Figura 4.4: Anverso y reverso de la tablilla con la tabla del 30 (siglo XVIII a.C.)
Fuente: https://matematicasvalledeljerte.wordpress.com/2012/03/17/la-matematica-en-mesopotamia/

De este modo, podían reconstruir cualquier otra multiplicación por ese número, como podemos observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.7

La siguiente tabla reproduce una tablilla hallada en una ciudad de la antigua Mesopotamia y contiene la tabla del *18*:



Aplicar el método de los escribas mesopotámicos para calcular:

a) 18×16
b) 18×45
c) $18 \times (16 : 45)$

Solución

a) Aplicando la tabla del *18*, junto con la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, propiedad conocida por los escribas mesopotámicos, resulta:

$18 \times 16 = 18 \times (12 + 4) = 18 \times 12 + 18 \times 4 = 03 : 36 + 01 : 12 = 04 : 48$

b) $18 \times 45 = 18 \times (40 + 5) = 18 \times 40 + 18 \times 5 = 12 : 00 + 01 : 30 = 13 : 30$

c) Cuando el número a multiplicar posee más de una cifra sexagesimal, por cuestiones prácticas el producto lo realizaremos disponiendo los números del siguiente modo, tal como lo hacemos en nuestro sistema decimal:

	Columna 3	*Columna 2*	*Columna 1*
	05	***13***	
		16	*45*
		$\times$ *18*	
Resultado	*05*	*01*	*30*

Debajo de la línea divisoria escribiremos el resultado de la multiplicación. Ahora, multiplicamos el número *18* por cada cifra del número *16:45*, comenzando por la cifra de la derecha y aplicando los incisos a) y b):

Columna 1 de la fila Resultado:
$18 \times 45 = 13 : 30$. Se escribe *30* y "me llevo ***13***" a la Columna *2*.

Columna 2 de la fila Resultado:
$(18 \times 16) + 13 = 04:48 + 13 = 05:01$. Se escribe 01 y "me llevo ***05***" a la Columna *3*.

Columna 3 de la fila Resultado:

Sólo contiene el número ***05***, proveniente del acarreo de la Columna *2*.

Por lo tanto, el resultado del producto es *05:01:30*, que expresado en nuestro sistema decimal es

$$30 \times 60^0 + 01 \times 60^1 + 05 \times 60^2 = 18090$$

Esta forma de disponer los números para multiplicarlos es una manera moderna de explicar el algoritmo que empleaban los babilonios para multiplicar. En realidad ellos utilizaban el *ábaco babilónico*, que consistía en una tablilla de arcilla fresca con cuatro o más columnas. En la columna de la derecha se escribía el número a multiplicar. Su modo de uso lo ilustramos en el próximo Ejemplo.

Ejemplo 4.8

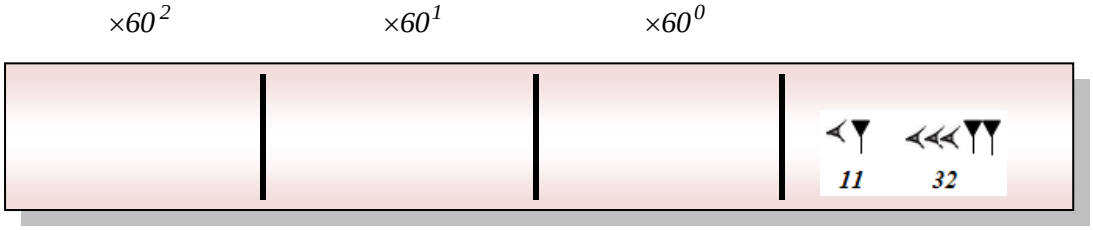
La siguiente tabla reproduce una tablilla hallada en Susa (Irán) y que data del siglo XVII a.C. Contiene la tabla del *25*:

2	_____	*50*
3	_____	*01:15*
4	_____	*01:40*
5	_____	*02:05*
6	_____	*02:30*
7	_____	*02:55*
8	_____	*03:20*
9	_____	*03:45*
10	_____	*04:10*
11	_____	*04:35*
12	_____	*05:00*
20	_____	*08:20*
30	_____	*12:30*
40	_____	*16:40*

Aplicar el ábaco babilónico para calcular *11:32* × *25*.

Solución

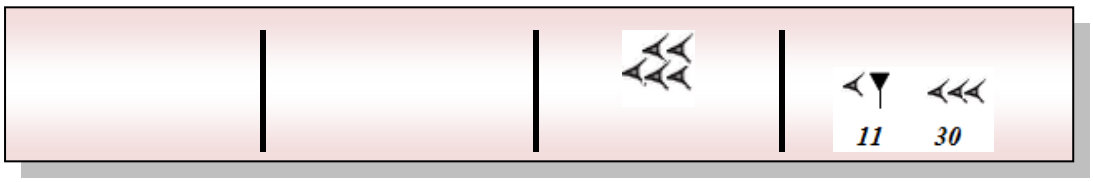
Nuestro ábaco consistirá en una tablilla de arcilla fresca con *4* columnas. En la columna de la derecha escribiremos el número a multiplicar, que en este caso es *11:32*.



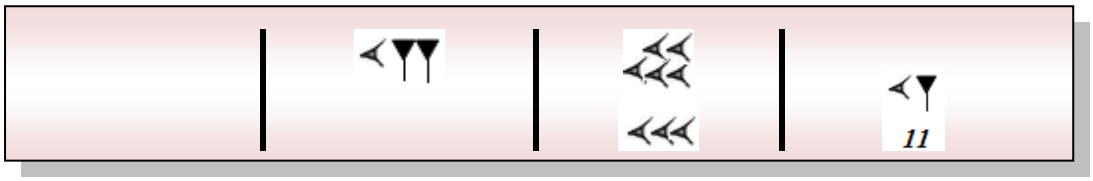
Las otras tres columnas, de derecha a izquierda, representan las unidades, las sesentenas (múltiplos de 60^1) y por último los múltiplos de 60^2.
Para empezar, calculamos 25×32. Como

$$25 \times 32 = 25 \times (2 + 30) = 25 \times 2 + 25 \times 30$$

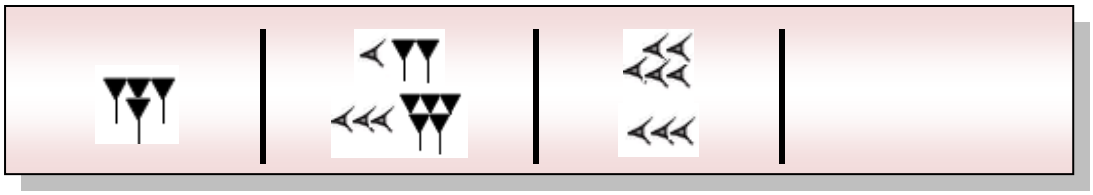
Entonces buscamos en la tabla del *25* la multiplicación 25×2. Colocamos su resultado, *50*, en la columna de las unidades y borramos el *2* de la columna derecha (pues esta multiplicación ya se efectuó).



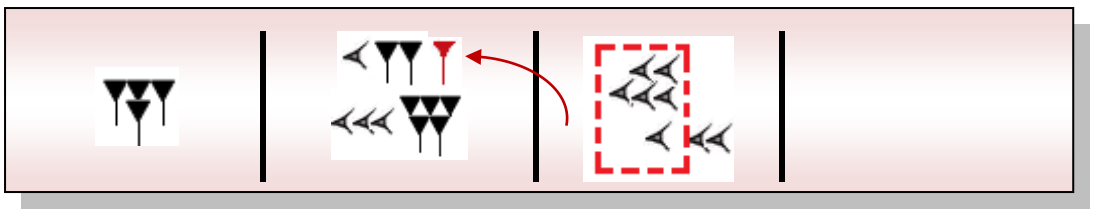
Ahora buscamos en la tabla del *25* la multiplicación 25×30, que es *12:30* .Colocamos este resultado en la tablilla: *30* en las unidades y *12* en la sesentena. Y después borramos el *30* de la columna derecha (ya que esta multiplicación se realizó).



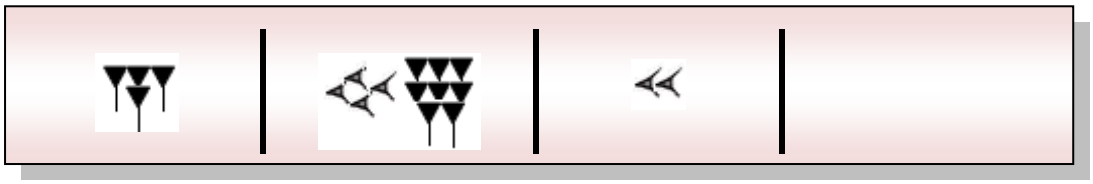
Buscamos en la tabla del *25* el producto 25×11, que es *04:35*. Colocamos *35* en la columna de las sesentenas y un *4* en la columna de los múltiplos de 60^2. Y se borra el *11* de la columna derecha.



Finalmente, sólo queda reagrupar los clavos y espigas. Así, *6* de las espigas de la columna de las unidades las borramos, ya que tienen el valor de *60*, y añadimos un clavo en la columna de la sesentena.



De este modo, se obtiene por resultado



Es decir, *04:48:20*, que en nuestro sistema decimal es

$$20\times60^{0}+48\times60^{1}+04\times60^{2}=17300$$

Cuando ambos factores tienen más de una cifra sexagesimal, el producto se efectúa de modo similar, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.9

Calcular $(03:12:02)\times(04:25)$

Solución

Si bien los escribas mesopotámicos realizaban estos productos en un ábaco, para agilizar la explicación de la multiplicación ubicaremos los datos y los resultados del siguiente modo:

				$\times\,(04:25)$	
			03	12	02
		1			
Fila 1		*01*	*20*	*00*	*50*
Fila 2	+	*12*	*48*	*08*	—
Total		*14*	*08*	*08*	*50*

Fila 1:

Calculamos $(03:12:02)\times25$ siguiendo la metodología explicada en los ejemplos anteriores. El resultado de dicha multiplicación es *01:20:00:50*.

Fila 2:

Calculamos $(03:12:02)\times04$. El resultado de dicha multiplicación es *12:48:08*. Volcamos este resultado en la Fila *2*, dejando un espacio vacío en la columna asociada a las unidades.

Total:

Se suman las Filas *1* y *2*. El resultado de dicha suma es el producto $(03:12:02)\times(04:25)$. Es decir, $(03:12:02)\times(04:25)=14:08:08:50$

Justificación del Algoritmo:

$$(03:12:02)\times(04:25)=(03:12:02)\times(04:00+25)=$$

$$=(03:12:02)\times 25+(03:12:02)\times(04:00)=(03:12:02)\times 25+(03:12:02)\times 04\times(01:00)=$$

$$=(03:12:02)\times 25+(03:12:02)\times 04\times(01:00)=\underbrace{(03:12:02)\times 25}_{Fila\ 1}+\underbrace{((03:12:02)\times 04):00}_{Fila\ 2}$$

De este modo, el resultado de la operación efectuada en la Fila *2* carece de unidades, y por esta razón se deja un espacio vacío en esa posición.

Las tablas de cuadrados

Además de las tablas de multiplicación, los escribas mesopotámicos contaban con tablas de cuadrados. En Senkerah, ciudad próxima a Babilonia y situada a orillas del río Éufrates, se halló en el año *1854* una tablilla que data del año *2000* a.C. Contenía los cuadrados de los números del *1* al *59*, similar a ésta que reproducimos a continuación:

1	*1*	*1*
2	*2*	*4*
3	*3*	*9*
4	*4*	*16*
5	*5*	*25*
6	*6*	*36*
7	*7*	*49*
8	*8*	*01:04*
9	*9*	*01:21*
10	*10*	*01:40*
11	*11*	*02:01*
12	*12*	*02:24*
13	*13*	*02:49*
14	*14*	*03:16*
15	*15*	*03:45*
16	*16*	*04:16*
17	*17*	*04:49*
18	*18*	*05:24*
19	*19*	*06:01*
20	*20*	*06:40*
30	*30*	*15:00*
40	*40*	*26:40*
50	*50*	*41:40*

Las tablas de cuadrados se empleaban para hallar raíces cuadradas o para efectuar multiplicaciones sobre la base de algunas de las siguientes fórmulas:

$$a\times b=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}\quad \acute{o}\quad a\times b=\frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}$$

De esta manera, aplicando una de estas fórmulas, en muchos casos la multiplicación se tornaba más sencilla. Más adelante veremos cómo era el proceso de división por *4* o por *2*. Los escribas mesopotámicos, como los egipcios, juzgaban que la adición y la sustracción eran demasiado elementales como para necesitar tablas o técnicas especiales. Para explicar la división en el Sistema Sexagesimal Babilónico, necesitamos conocer previamente cómo se utilizaban las fracciones. Por esta razón veremos primero este tema.

Las fracciones en el Sistema Sexagesimal Babilónico

En Mesopotamia se utilizaba un sistema de fracciones sexagesimales, similar a nuestras fracciones decimales. Las fracciones sexagesimales son aquellas cuyos denominadores son potencias de *60*. Los asiriólogos utilizan un *punto y coma* para separar la parte entera de su parte fraccionaria. Por ejemplo, la fracción sexagesimal *0; 30* representa

$$0\,;30 = 0 \times 60^0 + \frac{30}{60^1} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

O también

$$0\,;15\,:21:04 = 0 \times 60^0 + \frac{15}{60^1} + \frac{21}{60^2} + \frac{4}{60^3} = \frac{15}{60} + \frac{21}{60^2} + \frac{4}{60^3}$$

Hasta el siglo III a.C., el Sistema Babilónico carecía de un símbolo que permitiera diferenciar la parte entera de la parte fraccionaria de un número. Por ejemplo, el número

Puede interpretarse como

$$01:30 = 30 \times 60^0 + 01 \times 60^1 = 90$$

O bien

$$01\,;30 = 01 \times 60^0 + \frac{30}{60} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

O bien

$$0\,;01:30 = 0 \times 60^0 + \frac{01}{60^1} + \frac{30}{60^2} = 0 + \frac{1}{60} + \frac{30}{3600} = \frac{90}{3600} = \frac{1}{40}$$

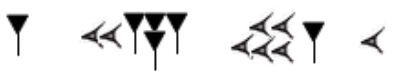
Cuando estas ambigüedades sucedían, el número al que se hacía referencia podía deducirse del contexto.

Observación 4.10

En el ejemplo que mostramos recientemente, la fracción sexagesimal *0 ;01 : 30* también puede escribirse como *0 ;1 : 30* . En este trabajo ambas simbologías serán utilizadas indistintamente.

Ejemplo 4.11

En una vieja tablilla babilónica (véase Figura *4.5*), fechada entre *1900 a.C.* y *1800* a.C., se encontró el siguiente número:



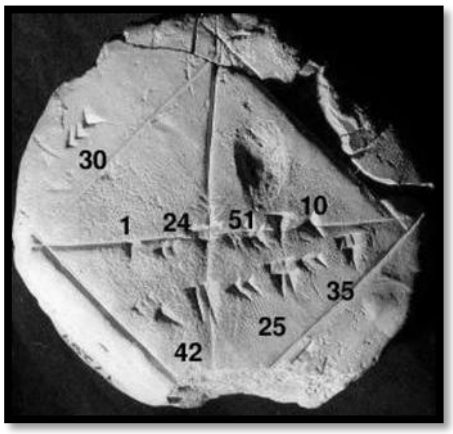


Figura 4.5: Tablilla en la que figura un cuadrado de lado 30 con las cifras 1, 24 ,51 y 10 en su diagonal. El contenido de la tablilla indica que para calcular la diagonal de un cuadrado de lado 30 hay que multiplicar 30 por 1; 24:51: 10, cuyo resultado da 42; 25:35.
Fuente: http://www.beanlogic.es/sumerios/matematicas.php

Por el contenido de la tablilla, se interpreta que dicho número es

$$1;24:51:10$$

Que en nuestro sistema decimal es

$$1\times 60^{0}+\frac{24}{60^{1}}+\frac{51}{60^{2}}+\frac{10}{60^{3}}=1+\frac{24}{60}+\frac{51}{3600}+\frac{10}{216000}=1.41421296$$

Este número es una estimación de $\sqrt{2}$ con bastante precisión. Esto prueba el gran avance matemático al que se había llegado en la antigua Mesopotamia.

El Sistema Sexagesimal Babilónico también cuenta con propiedades equivalentes a la decuplicación y descentuplicación del Sistema Egipcio, lo cual facilita en algunos casos el proceso de multiplicación. Mencionaremos a continuación algunas de ellas, cuyas demostraciones omitiremos.

Propiedad 4.12

Sean a,b dos números expresados en Sistema Sexagesimal Babilónico, con p y q cifras sexagesimales cada uno de ellos. Sean $m\ ,n\geq 0$. Entonces

1) $\left(a:\underbrace{0:0:....:0}_{m\ veces}\right)\times\left(b:\underbrace{0:0:....:0}_{n\ veces}\right)=(a\times b):\underbrace{0:0:.....:0}_{(m+n)\ veces}$

2) $\left(0;\underbrace{0:....:0}_{m\ veces}:a\right)\times\left(0;\underbrace{0:....:0}_{n\ veces}:b\right)=0;\underbrace{0:0:.....:0:(a\times b)}_{(m+n+p+q)\ posiciones}$

Ejemplo 4.13

Calcular

a) $(13:05:03:0:0:0)\times(02:18:0)$ b) $(0;0:0:30)\times(0;0:0:0:12)$

c) $(08:03)\times(0;0:20:3)$ d) $(12;11:10:13)\times(3;02)$

Solución

a) Aplicamos el inciso *1*) de la Propiedad *4.9*. En este caso,

$$a = 13:05:03\ ,\ b = 02:18\ ,\ m = 3\ \wedge\ n = 1$$

Entonces

$$(13:05:03:0:0:0)\times(02:18:0) = ((13:05:03)\times\ (02:18)):0:0:0:0 =$$

$$= 30:05:36:54:0:0:0:0$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{rcccc} & \color{red}{1} & & & \\ & 13 & 05 & 03 & \\ & \times & (02:18) & & \\ \hline & \color{red}{1} & & & \\ & 03 & 55 & 30 & 54 \\ + & 26 & 10 & 06 & — \\ \hline & 30 & 05 & 36 & 54 \end{array}$$

b) Aplicamos el inciso *2*) de la Propiedad *4.9*. En este caso,

$$a = 30\ ,\ b = 12\ ,\ \ p = q = 1,\ m = 2\ \wedge\ n = 3$$

Calculamos $a \times b = 30 \times 12 = 6:0$. Luego, a partir de *6:0*, (que lo podemos considerar igual a $6:0;$), corremos "*el punto y coma*" $m + n + p + q = 7$ lugares hacia la izquierda. De este modo,

$$(0;0:0:30)\times(0;0:0:0:12) = 0;0:0:0:0:0:6:0$$

Es decir,

$$(0;0:0:30)\times(0;0:0:0:12) = 0;0:0:0:0:0:6$$

c) En este caso, sólo en el segundo factor figura un "*punto y coma*", y hay *3* cifras sexagesimales después de él. Primeramente calculamos $(08:03)\times(20:3)$

$$\begin{array}{rccc} & \color{red}{1} & & \\ & 08 & 03 & \\ & \times & (20:03) & \\ \hline & & 24 & 09 \\ + & & & \\ & 2 & 41 & 00 \\ \hline & 2 & 41 & 24 \end{array}$$

Luego,

$$(08:03)\times(20:3) = 2:41:24:09$$

A partir de este resultado, corremos "*el punto y coma*" *3* lugares hacia la izquierda. De este modo, obtenemos

$$(08:03)\times(0;0:20:3) = 2;41:24:09$$

d) Observemos que el primer factor tiene 3 cifras sexagesimales después del punto y coma, mientras el segundo factor tiene 1 cifra sexagesimal. Primeramente eliminamos los puntos y coma de cada factor y calculamos

$$(12:11:10:13)\times(3:02)$$

		12	*11*	*10*	*13*
			$\times\ (3:02)$		
+		*24*	*22*	*20*	*26*
	36	*33*	*30*	*39*	—
	36	*57*	*52*	*59*	*26*

Luego,

$$(12:11:10:13)\times(3:02)=36:57:52:59:26$$

A partir de este resultado, corremos el punto y coma $3+1=4$ lugares hacia la izquierda. De este modo, resulta

$$(12;11:10:13)\times(3;02)=36;57:52:59:26$$

Como podemos comprobar, nuestro Sistema Decimal ha heredado los algoritmos multiplicativos del Sistema Babilónico. Por otro lado, en este sistema también existen las fracciones unitarias o cuantavos, como veremos a continuación.

Las fracciones recíprocas

El Sistema Babilónico también cuenta con fracciones de la forma

$$\frac{1}{a}\ \ con\ a\in\mathbb{N}$$

Llamadas "*el recíproco de a*". Son sumamente importantes ya que gracias a ellas los escribas mesopotámicos podían, como veremos más adelante, efectuar la operación de división.

Debemos destacar que el número *60* tiene tres divisores primos: *2, 3 y 5*. En cambio, el número *10* posee dos divisores primos: *2* y *5*. Como consecuencia de esto, sabemos que una fracción tiene una representación sexagesimal finita si y sólo si los únicos divisores primos de su denominador son *2, 3 ó 5*. Por otro lado, una fracción tiene una representación decimal finita si y sólo si los únicos divisores primos de su denominador son *2 ó 5*. Esta diferencia hace que haya más fracciones que puedan representarse como fracciones sexagesimales finitas que como fracciones decimales finitas.

Por ejemplo, la representación sexagesimal de la fracción *1/3* es *0; 20*, mientras que su expresión decimal es *0.333…*

Gracias a esta propiedad, el cálculo con fracciones en el Sistema Sexagesimal se facilita notablemente. En los siguientes ejemplos mostraremos cómo hallar la expresión sexagesimal de los recíprocos de ciertos números.

Ejemplo 4.14

Hallar la expresión sexagesimal de los recíprocos de los siguientes números:

a) *4*
b) *8*
c) *125*

Solución

En general, para hallar el recíproco del número *a*, los escribas mesopotámicos calculaban, mediante sucesivas restas, el número que resultaba de repartir *60* unidades entre *a* unidades. Pero aquí, para agilizar los cálculos, nos valdremos de la aritmética y notación actual.

a)

Primer Paso

Efectuamos la división entre *60* y *4*.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 15 \\ 0 & \end{array}$$

Por lo tanto,

$$60 = 15 \times 4 \qquad \text{[I]}$$

Segundo Paso

De la ecuación [I] despejamos *1/4*:

$$\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{4} = 0\,;15$$

b)

Primer Paso

Efectuamos la división entre *60* y *8*.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 8 \\ \cline{2-2} 4 & 7 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$60 = 8 \times 7 + 4 \qquad \text{[II]}$$

Segundo Paso

De la ecuación [II] despejamos *1/8*:

$$\frac{1}{8} = \frac{7}{60} + \frac{4}{60 \times 8}$$

Ahora bien, en esta última ecuación, todos los denominadores del miembro derecho deben ser potencias de *60*. Por esta razón haremos el siguiente artificio algebraico:

$$\frac{1}{8}=\frac{7}{60}+\frac{4}{60\times 8}=\frac{7}{60}+\frac{4\times 60}{60\times 8\times 60}=\frac{7}{60}+\frac{30}{60^2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{8}=0\,;7\,:30$$

c)

Primer Paso:

Como *125 > 60*, haremos la división entre la potencia de *60* más cercana a *125*, y *125*. Es decir, efectuaremos el cociente entre 60^2 y *125*:

$$\begin{array}{r|l} 3600 & 125 \\ \cline{2-2} 1100 & 28 \\ 100 & \end{array}$$

Por lo tanto,

$$3600=28\times 125+100 \qquad \text{[III]}$$

Segundo Paso

De la ecuación [III] despejamos *1/125*:

$$\frac{1}{125}=\frac{28}{60^2}+\frac{100}{125\times 60^2}=\frac{28}{60^2}+\frac{100\times 60}{125\times 60^2\times 60}=\frac{28}{60^2}+\frac{48}{60^3}$$

Es decir

$$\frac{1}{125}=\frac{28}{60^2}+\frac{48}{60^3}$$

En consecuencia

$$\frac{1}{125}=0\,;0\,:28\,:48$$

Los recíprocos de los números que hemos calculado en el ejemplo anterior tienen expresión sexagesimal finita, ya que todos ellos tienen a *2, 3* ó *5* como únicos divisores primos. Pero, ¿qué ocurre si el número tiene otros divisores primos? En este caso su recíproco tendrá una expresión sexagesimal infinita. Cuando esto sucede, se suelen hacer aproximaciones, como veremos en el próximo ejemplo.

Ejemplo 4.15

Hallar una aproximación a la expresión sexagesimal de los recíprocos de los siguientes números:

a) *7*
b) *59*

Solución

a)

Primer Paso

Efectuamos la división entre *60* y *7*.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 7 \\ \hline 4 & 8 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$60 = 8 \times 7 + 4 \qquad [I]$$

Segundo Paso

De la ecuación [I] despejamos *1/7*:

$$\frac{1}{7} = \frac{8}{60} + \frac{4}{60 \times 7} \cong \frac{8}{60} + \frac{4}{60 \times 6} = \frac{8}{60} + \frac{4 \times 60}{60 \times 6 \times 60} = \frac{8}{60} + \frac{40}{60^2}$$

Luego

$$\frac{1}{7} \cong \frac{8}{60} + \frac{40}{60^2}$$

Es decir

$$\frac{1}{7} \cong 0\,;8 : 40$$

b)

Primer Paso

Efectuamos la división entre *60* y *59*.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 59 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

Entonces

$$60 = 1 \times 59 + 1 \qquad [II]$$

Segundo Paso

De la ecuación [II] despejamos *1/59*:

$$\frac{1}{59} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60 \times 59} \cong \frac{1}{60} + \frac{1}{60 \times 60} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60^2}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{59} \cong \frac{1}{60} + \frac{1}{60^2}$$

Es decir

$$\frac{1}{59} \cong 0\,;1 : 1$$

La Tabla de recíprocos

Como mencionamos anteriormente, en Mesopotamia utilizaban los recíprocos para efectuar una división o resolver ecuaciones. Por esta razón se han encontrado numerosas tablillas con listas de inversos, las cuales eran utilizadas en las escuelas como herramienta de cálculo. En la siguiente figura mostramos una de estas tablillas, de la cual hemos reproducido su contenido.

2	0;30
3	0;20
4	0;15
5	0;12
6	0;10
8	0;7:30
9	0;6:40
10	0;6
12	0;5
15	0;4
16	0;3:45
18	0;3:20
20	0;3
24	0;2:30
25	0;2:24

Figura 4.6: Izquierda: Tablilla de recíprocos. Derecha: Reproducción de su contenido. Fuente: http://www.beanlogic.es/sumerios/matematicas.php

La División en el Sistema Sexagesimal Babilónico

En Mesopotamia no se había desarrollado un algoritmo para la división entre dos números *a* y *b*, sino que basaban su cálculo en el hecho de que

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Así, para efectuar la división, multiplicaban el dividendo por el recíproco del divisor. Es por ello que, para facilitar los cálculos, contaban con tablas que contenían los recíprocos de los números que aparecían con mayor frecuencia en la vida práctica.

Ejemplo 4.16

Basándose en la Tabla de recíprocos de la Figura *4.6*, efectuar las siguientes divisiones según el Sistema Babilónico:

a) $\dfrac{8:02}{3}$

b) $\dfrac{28:01:04}{25}$

Solución

a) Observando la Tabla de recíprocos, tenemos que $\frac{1}{3} = 0;20$. Por lo tanto

$$\frac{8:02}{3} = 8:02 \times \frac{1}{3} = (8:02) \times 0;20$$

Para calcular este producto, aplicamos la Propiedad *4.9*, inciso *2*). Para ello efectuamos el producto $(8:02) \times 20$.

$$
\begin{array}{rrr}
\color{red}{02} & & \\
 & 8 & 02 \\
 & \times\ 20 & \\
\hline
02 & 40 & 40
\end{array}
$$

Luego, $(8:02)\times 20 = 2:40:40$. En consecuencia, $(8:02)\times\ 0;20 = 2:40;40$

Es decir, $\dfrac{8:02}{3} = 2:40;40$

b) De acuerdo a la Tabla de recíprocos, resulta que $\dfrac{1}{25} = 0;2:24$ .Por lo tanto

$$
\frac{28:01:04}{25} = (28:01:04)\times\frac{1}{25} = (28:01:04)\times(0;2:24)
$$

Nuevamente aplicamos la Propiedad *4.9*, inciso *2*). Efectuamos entonces el producto $(28:01:04)\times(2:24)$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & \color{red}{1} & \\
 & & 28 & 01 & 04 \\
 & \times & (2:24) & & \\
\hline
 & 11 & 12 & 25 & 36 \\
 & 56 & 02 & 08 & — \\
\hline
01 & 07 & 14 & 33 & 36
\end{array}
$$

Luego

$$
(28:01:04)\times(2:24) = 01:07:14:33:36
$$

En consecuencia,

$$
(28:01:04)\times(0;2:24) = 01:07:14;33:36
$$

Es decir

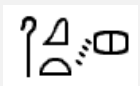
$$
\frac{28:01:04}{25} = 01:07:14;33:36
$$

Finalizamos este capítulo mencionando que en la antigua Mesopotamia se elaboraron también tablas de raíces cuadradas y vislumbraron lo que luego sería el *Teorema de Pitágoras*. En efecto, una tablilla que data aproximadamente de *1800* a.C., conocida como la *Tablilla Plimpton 332*, prueba que en Babilonia se descubrió el secreto de los triángulos rectángulos (que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos). Esto significa que conocían el *Teorema de Pitágoras*, muchos siglos antes que Pitágoras (*580 - 495* a.C.) lo descubriera. Este hecho, junto con la invención del primer Sistema de Numeración Posicional, ha conducido a los historiadores a afirmar que la Matemática Mesopotámica alcanzó un nivel más alto que la del Antiguo Egipto.

Capítulo 5
Resolución de los primeros problemas matemáticos

Al comienzo del segundo milenio antes de Cristo, las culturas de Egipto y de la Mesopotamia habían establecido una Matemática compleja y eficaz, que podía ser aplicada de una manera efectiva a los problemas de la sociedad en cuestión. Como Egipto y Mesopotamia eran en esa época estados burocráticos altamente centralizados, con un comercio interior y exterior desarrollado, cabe esperar que los problemas que tratasen unos y otros fueran similares. De hecho, la mayoría de los historiadores de la Matemática califican, generalmente, de *práctica* o *empírica* a la Matemática de estos dos pueblos. Sin embargo, la forma de resolver un mismo problema matemático son muy diferentes en cada una de estas culturas. En este capítulo analizaremos dos problemas matemáticos planteados en aquel entonces y veremos cómo fueron resueltos empleando la Matemática Egipcia y la Mesopotámica. Debido a que en dichos problemas figuran ciertas unidades de medida utilizadas en aquella época, las mencionaremos previamente.

Algunas unidades de medida del Antiguo Egipto

Unidades		
Nombre	***Equivalencia***	***Símbolo***
heqat	*Unidad de capacidad. Equivale a 4.54 litros*	
khar	*20 heqat*	
100-cuádruple-heqat	*400 heqat*	
Codo	*Unidad de longitud. Equivale a 52 cm*	
Codo^3	*Unidad de volumen. Equivale a* $1\ \frac{1}{2}$ *khar*	

De estas unidades de medida deducimos que

$$1\ khar = \frac{1}{20}\ 100\text{-}cuádruple\text{-}heqat$$

El *heqat* sirvió para medir la capacidad de almacenar granos de trigo o cebada, dos alimentos fundamentales en la cultura egipcia. Por ejemplo, *1/320 heqat* representa la cantidad de granos que un hombre puede llevarse a la boca.

El *codo* fue una unidad empleada en muchas culturas por su origen antropométrico. En casi todas ellas era la distancia que mediaba entre el codo y el final de la mano abierta.

Algunas unidades de medida de la Antigua Mesopotamia

Unidades	
Nombre	***Equivalencia***
qun o sila	*Unidad de capacidad. Equivale a 1 litro*
sutum	*10 litros*
panum	*60 litros*
codo	*Unidad de longitud. Equivale a 52 cm*
nindan	*12 codos*
Codo^3	*Unidad de volumen. Equivale a 6 silas*

El problema de los dos graneros

Una de las tareas fundamentales, tanto en Egipto como en Mesopotamia, consistía en la acumulación de reservas de grano de trigo o cebada y su almacenamiento en graneros, tanto para su distribución en tiempos de escasez como para controlar su posterior distribución a templos, trabajadores de la construcción y población en general. No ha quedado rastro alguno de estos graneros, tan sólo dibujos y grabados sobre piedra o arcilla que testimonian la forma que tenían. Generalmente eran cilíndricos y algunos de ellos terminaban en una pequeña cúpula con un orificio en su parte superior donde se volcaban los granos.

Figura 5.1: Izquierda: Un modelo reducido de graneros egipcios en barro cocido. Son cilíndricos y abiertos en su cima. Fuente: https://personal.us.es/cmaza/egipto/volumen1.htm
Derecha: Impresión de un sello que data del cuarto milenio a.C. hallado en Elam (actual suroeste de Irán). Representa un obrero llenando un silo. Fuente: Referencia [*1*]

He aquí los dos primeros documentos que examinaremos. Ambos datan del segundo milenio antes de Cristo. Las palabras que figuran dentro de un paréntesis son añadidas, para una mejor comprensión del texto.

Texto egipcio	*Texto babilónico*
Ejemplo para hacer un granero redondo de 9 (y de) 10. *Restarás 1/9 de 9: 1.* *Resta: 8.* *Multiplica 8 por 8; resulta 64.* *Multiplicarás 64 por 10; resulta 640.* *Añádele su mitad; resulta 960.* *Su cantidad en khar.* *Tomarás 1/20 de 960: 48.* *El montante de 100-cuádruple heqat;* *Trigo: 48 heqat.* *Forma de su procedimiento* *1 8 1 64 1/10 96* *2 16 \10 640 \1/20 48* *4 32* *\8 64 \1/2 320* *Total 960*	*El procedimiento para un tronco.* *5 codos era su diámetro y 1 su profundidad.* *¿Cuánto vale en medida de granos?* *En tu procedimiento:* *Pon la profundidad tanto como el diámetro.* *Triplica 5, el diámetro; eso asciende a 15.* *15 es la circunferencia del "tronco".* *Cuadrado de 15; eso asciende a 3:45.* *Multiplica 3:45 por 0;5, el igigubbum del círculo; eso asciende a 18;45 como superficie.* *Multiplica 18; 45 por 1, la profundidad; eso asciende a 18;45 como volumen.* *Multiplica 18; 45 por 6 (el igigubbum de) la medida de grano; eso asciende a 1:52;30.* *El tronco contiene 1 panum, 5 sutum, 2 1/2 qum de grano.* *Éste es el procedimiento.*

Antes de realizar el análisis detallado de estos textos, podemos hacer algunas observaciones relativas a la forma de presentación de los problemas matemáticos. Lo primero que salta a la vista es la ausencia de simbolismos, ecuaciones y fórmulas, características de los escritos modernos. Sólo hay palabras y números. Pero al leer, nos encontramos con un claro desafío surgido de las necesidades de la vida cotidiana: poder calcular la capacidad de un granero cilíndrico de determinadas dimensiones, aunque las unidades de medida sean difíciles de identificar a menudo. Luego del enunciado del problema le sigue una solución, etapa por etapa, con la respuesta final. Todos los textos matemáticos de la época presentan las siguientes características:

■ Se emplea la retórica, en el sentido de que los problemas se expresan en palabras, a menudo las del lenguaje cotidiano, y no mediante símbolos.

■ Su presentación es numérica, ya que los datos y resultados son números concretos y no abstracciones.

■ Su resolución es algorítmica, pues se indican claramente los pasos a seguir para llegar a la solución y sin demostraciones generales.

■ Los problemas se introducen como un "ejemplo", algo típico tanto de la cultura egipcia como de la mesopotámica.

■ El alumno puede resolver problemas similares con sólo modificar los valores numéricos.

■ Los problemas están escritos en segunda persona (se interpela directamente al estudiante), algunas veces en futuro y otras veces en imperativo.

El contexto en que se inscriben estos textos nos permite observar otros puntos de contacto. Cada uno de ellos está extraído de una colección de problemas, reunidos, respectivamente, en un papiro y una tablilla de arcilla. Sin duda, tales colecciones se usaban como manuales escolares.

5.1 Análisis del texto egipcio

El texto corresponde al Problema N°*41* del Papiro de Rhind. Este problema trata de un granero cilíndrico cuyas dimensiones se describen como *9* y *10*. Como es habitual en la Matemática antigua, las unidades de medida que se utilizan en el problema no se indican explícitamente, a menos que difieran de la unidad básica. Para las medidas de longitud, la unidad básica en Egipto es el *codo*, que es, por lo tanto, la medida usada en este texto. Así que tenemos un cilindro de *9 codos* de diámetro y *10 codos* de altura. La pregunta, aunque no se expresa, queda clara según las instrucciones: consiste en hallar el volumen del granero, no en *codos cúbicos*, una medida que sólo existía como etapa intermedia en la solución de un problema, sino en una *unidad de medida práctica*, que en esta ocasión es la *capacidad en granos de trigo.* El algoritmo que se usa para ello quedará más claro para nosotros si representamos sus etapas sucesivas bajo una forma ligeramente simbólica:

Número de etapa	***Cálculo***	***Operación***
		Cálculo del volumen:
1	$1/9 \times 9 = 1$	*Multiplicación*
2	$9 - 1 = 8$	*Resta*
3	$8 \times 8 = 64$	*Multiplicación; da por resultado el área de la base en codos*^{2}
4	$64 \times 10 = 640$	*Multiplicación; da por resultado el volumen del granero en codos*^{3}
		Conversión de codos^3 ***a khar:***
5	$640 + \frac{1}{2} \times 640 = 960$	*Capacidad del granero en khar*
		Conversión de khar a heqat:
6	$\frac{1}{20} \times 960 = 48$	*Multiplicación; da por resultado la capacidad en 100-cuádruple-heqat*

Las líneas que siguen, bajo el título *Forma de su procedimiento*, representan los métodos de cálculo que el escriba debe realizar para obtener los resultados que se muestran en cada etapa. Veamos detalladamente cómo se obtienen estos resultados, utilizando la aritmética egipcia.

Etapa 1

Se multiplica la fracción *1/9* por el diámetro del círculo, que en este caso es *9*. Es decir, se calcula

$$\frac{1}{9} \times 9$$

El resultado da *1*, por el inciso *5*) de la Propiedad *3.15*.

Etapa 2

Al valor del diámetro se le resta el resultado obtenido en la Etapa *1*:

$$9 - 1$$

El cálculo de esta resta se efectúa según lo detallado en la pág. *28*, del siguiente modo:

Obviamente, obtenemos por resultado *8*. Los egipcios, al igual que los babilonios, no registraban las operaciones de suma y resta, ya que las consideraban muy elementales.

Etapa 3

Se multiplica por sí mismo el resultado obtenido en la *Etapa 2*. Es decir, se calcula

$$8 \times 8$$

El cálculo detallado se encuentra en las dos primeras columnas, debajo de la mención *Forma de su procedimiento*. De acuerdo al método egipcio de multiplicación, explicado en la pág.*30*, para efectuar este producto armamos una tabla con dos columnas. La primera columna comienza con *1*, mientras que la segunda se inicia con el primer factor, que en este caso es *8*.

		Técnica
1	*8*	*Inicialización.*
2	*16*	*Duplicar la fila anterior.*
4	*32*	*Duplicar la fila anterior*
\8	*64*	*Duplicar la fila anterior*

Así, el resultado del producto es *64*, que es el área de la base del granero. Se suele escribir el trazo "\" para indicar el final de una operación.

Etapa 4

Se calcula el volumen del granero, multiplicando el área de la base por su altura, que en este caso es *10*. Es decir,

$$64 \times 10$$

Aquí se aplica la técnica de *decuplicación*, explicada en el inciso *1*) del Ejemplo *3.7*. Este cálculo quedó registrado en la tercera y cuarta columna, debajo del título *Forma de su procedimiento*:

		Técnica
1	*64*	*Inicialización.*
\10	*640*	*Decuplicar la fila anterior.*

Etapa 5

El volumen del granero, que resultó igual a *640 codos*^{3}, es expresado ahora en *khar*. Teniendo en cuenta que

$$1\ codo^3 = 1\ \frac{1}{2}\ khar$$

Entonces

$$640\ codo^3 = 640 \times \left(1\ \frac{1}{2}\right)\ khar = 640 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)\ khar = \left(640 + \frac{1}{2} \times 640\right)\ khar$$

Por lo tanto, al número *640* se le sumará su mitad. Para ello se calcula primero $\frac{1}{2} \times 640$ utilizando la *Técnica de Desduplicación*, explicada en la pág. *51*, del siguiente modo: Descomponemos el número *640*, separando las unidades y decenas de las centenas, a fin de aplicar la *Tabla de Duplicación* y la *Técnica de Descentuplicación:*

$$\frac{1}{2} \times 640 = \frac{1}{2} \times (600 + 40) = \frac{1}{2} \times 600 + \frac{1}{2} \times 40 = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{100} \times 6\,00 + 20 =$$

$$= 100\ \times \frac{1}{2} \times 6 + 20 = 100 \times 3 + 20 = 300 + 20 = 320$$

En consecuencia

$$\frac{1}{2} \times 640 = 320$$

La ejecución de esta desduplicación aparece en el texto egipcio, debajo del título *Forma de su procedimiento*, y tiene la forma siguiente:

		Técnica
1	*640*	*Inicialización. Esta fila no figura en el texto egipcio.*
\1/2	*320*	*Desduplicar la fila anterior.*

Finalmente se calcula *640+320*, según lo explicado en la pág.*19*, de la siguiente manera:

Obteniendo por resultado *960*:

Como mencionamos anteriormente, los egipcios no registraban las operaciones de suma o resta, por considerarlas demasiado simples.

Etapa 6

La capacidad del granero, que resultó igual a *960 khar*, es expresado ahora en *100-cuádruple-heqat*. Como

$$1\ khar = \frac{1}{20}\ 100\text{-}cuádruple\text{-}heqat$$

Entonces

$$960\ khar = \frac{1}{20} \times 960 \quad 100\text{-}cuádruple\text{-}heqat$$

Para calcular $\frac{1}{20} \times 960$, se utiliza la *Técnica de Desdecuplicar (multiplicar por 1/10) y Desduplicar (multiplicar por 1/2)*, detallada en la pág. *52*. Luego, este producto se resuelve del siguiente modo:

$$\frac{1}{20} \times 960 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times 960$$

Los detalles de esta cuenta también se encuentran en las dos últimas columnas, debajo del título *Forma de su procedimiento:*

		Técnica
1	*960*	*Inicialización. Esta fila no figura en el texto egipcio.*
1/10	*96*	*Desdecuplicar la fila anterior.*
\ 1/20	*48*	*Desduplicar la fila anterior*

Por lo tanto, la capacidad del granero es de *48 100-cuádruple-heqat.*

Observación 5.1

Del análisis del algoritmo planteado en el texto egipcio, podemos deducir que los egipcios conocían la fórmula del volumen de un cuerpo cilíndrico, ya que en la *Etapa 4* del algoritmo, el volumen se calcula efectuando la multiplicación entre el área de la base y la altura del granero. Por otro lado, cabe preguntarnos: ¿qué relación existe entre la fórmula egipcia del área de un círculo y la que conocemos actualmente? Antes de responder a esta pregunta, generalizaremos el texto egipcio para cualquier valor de diámetro y altura.

Análisis del texto egipcio: Caso general

Reescribiremos el algoritmo egipcio de forma más abstracta. Representaremos con *d* al diámetro del cilindro y por *h* a su altura (ambas medidas están expresadas en *codos*). De este modo, el texto egipcio se generaliza así:

Número de etapa	*Cálculo*	*Operación*
		Cálculo del volumen:
1	$\frac{1}{9}\times d$	
2	$d-\frac{1}{9}\times d$	
3	$\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)\times\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)$	*Da por resultado el área de la base en codos*^{2}
4	$\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)\times\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)\times h$	*Da por resultado el volumen del granero en codos*^{3}
		Conversión de codos*^{3} *a khar:
5	$\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)\times\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)\times h\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$	*Capacidad del granero en khar*
		Conversión de khar a heqat
6	$\frac{1}{20}\times\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)\times\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)\times h\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$	*Da por resultado la capacidad en 100-cuádruple-heqat*

De las *Etapas 3* y *4* concluimos que en el antiguo Egipto aplicaban las siguientes fórmulas:

Área de un círculo: $\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)\times\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)$

Volumen de un cilindro: $\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)\times\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)\cdot h$

Donde

d : *Diámetro del círculo*
h : *Altura del cilindro*

Relación entre la fórmula egipcia del área de un círculo y la conocida actualmente

En la fórmula egipcia del área de un círculo, considerando que $d=2r$, donde r es el radio del círculo, tenemos que

$$\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)\times\left(d-\frac{1}{9}\times d\right)=\left(\frac{8}{9}\times d\right)\times\left(\frac{8}{9}\times d\right)=\frac{64}{81}\times d^2=\frac{64}{81}\times(2r)^2=\frac{64}{81}\times 4\times r^2=\frac{256}{81}\times r^2$$

Por lo tanto

$$Área\ de\ un\ círculo = \frac{256}{81} \times r^2$$

Observemos que

$$\frac{256}{81} = 3.1604938$$

Luego

$$Área\ de\ un\ círculo = 3.1604938\ r^2$$

Como comprobamos en esta fórmula, el área del círculo se calcula multiplicando el cuadrado del radio por una fracción constante *256/81*, que se aproxima bastante al número π. Esta fórmula es muy similar a la que aplicamos actualmente, pero utilizando π en lugar de la fracción *256/81*.

¿Conocían los egipcios el número π?

Hasta el día de hoy, no se ha encontrado ningún documento en el antiguo Egipto que muestre indicios acerca de la existencia del número π. De haberlo conocido, lo habrían expresado como suma o resta de números naturales y/o cuantavos, ya que éstos eran los únicos números que manejaban.
Lo que es seguro es que la constante π estaba completamente fuera del marco conceptual de los escribas egipcios, que no estaban familiarizados con la fórmula $Area = \pi\ r^2$. Sin embargo, desde la perspectiva actual y si hay que asignar un valor implícito a π, éste sería de *256/81 ≈ 3,1605*, una excelente aproximación para hace cuatro mil años.

El mismo problema, con otros datos

El texto que sigue también fue extraído del Papiro de Rhind. Se trata del mismo problema que analizamos recientemente, pero con otros datos:

El segundo silo
Un granero redondo de 10 (y de) 10. *Restarás 1/9 de 10: 1 1/9.* *Resta: 8 2/3 1/6 1/18.* *Multiplicarás 8 2/3 1/6 1/18 por 8 2/3 1/6 1/18; resulta 79 1/108 1/324.* *Multiplicarás 79 1/108 1/324 por 10; resulta 790 1/18 1/27 1/54.* *Añádele su mitad; resulta 1185.* *Su cantidad en khar.* *Multiplica 1/20 por 1185: 54 1/4.* *Eso es lo que va a entrar en 100-cuádruple heqat;* *Trigo: 54 1/4 100-cuádruple heqat.*

Los detalles de cómo debe proceder el escriba para obtener estos resultados figuran también en el papiro, organizados en la siguiente tabla titulada *Forma de su procedimiento*:

Forma de su procedimiento						
1	*8*	*2/3*	*1/6*	*1/18*		
2	*17*	*2/3*	*1/9*			
4	*35*	*1/2*	*1/18*			
\ 8	*71*	*1/9*				
\ 2/3	*5*	*2/3*	*1/6*	*1/18*	*1/27*	
1/3	*2*	*2/3*	*1/6*	*1/12*	*1/36*	*1/54*
\1/6	*1*	*1/3*	*1/12*	*1/24*	*1/72*	*1/108*
\1/18	*1/3*	*1/9*	*1/36*	*1/72*	*1/216*	*1/324*
Total	***79***	***1/108***	***1/324***			
1	*79*	*1/108*	*1/324*			
10	*790*	*1/18*	*1/27*	*1/54*		
[*1*	*790*	*1/18*	*1/27*	*1/54*]		
1/2	*395*	*1/36*	*1/54*	*1/208*		
Total	***1185***					
[*1*	*1185*]					
\ 1/10	*118*	*1/2*				
\ 1/20	*59*	*1/4*				

Las filas que aparecen entre corchetes no figuran en el Papiro de Rhind; sólo fueron agregadas para facilitar la comprensión del procedimiento de cálculo.

Recordemos que el trazo "\" sirve para indicar el final de una operación.

Como vemos, el problema es el mismo que antes: se trata de calcular el volumen (en una unidad de capacidad en granos) de un granero cilíndrico. Lo único que ha cambiado es el diámetro: de *9 codos* se ha convertido en *10 codos*. Pero habrá una gran diferencia en lo que respecta a los cálculos, como veremos a continuación.

En la forma esquematizada que habíamos introducido antes, el algoritmo se presenta como sigue:

Número de etapa	***Cálculo***	***Operación***
		Cálculo del volumen:
1	$1/9 \times 10 = 1\ 1/9$	*Multiplicación*
2	$10 - 1\ 1/9 = 8\ 2/3\ 1/6\ 1/18$	*Resta*
3	$(8\ 2/3\ 1/6\ 1/18) \times (8\ 2/3\ 1/6\ 1/18) = 79\ 1/108\ 1/324$	*Multiplicación; da por resultado el área de la base en codos*^{2}
4	$(79\ 1/108\ 1/324) \times 10 = 790\ 1/18\ 1/27\ 1/54$	*Multiplicación; da por resultado el volumen del granero en codos*^{3}
		Conversión de codos^3 ***a khar:***
5	$(790\ 1/18\ 1/27\ 1/54) + \frac{1}{2} \times (790\ 1/18\ 1/27\ 1/54) = 1185$	*Capacidad del granero en khar*
		Conversión de khar a heqat:
6	$\frac{1}{20} \times 1185 = 59\ 1/4$	*Multiplicación; da por resultado la capacidad en 100-cuádruple-heqat*

Veamos detalladamente cómo se obtienen estos resultados, utilizando la aritmética egipcia.

Etapa 1

Se multiplica la fracción *1/9* por el diámetro del círculo, que en este caso es *10*. Es decir, se calcula

$$10 \times \frac{1}{9}$$

La explicación de cómo se efectuó esta operación no figura en la *Forma de su procedimiento* del Papiro de Rhind. Aquí mostraremos la técnica empleada: Primeramente efectuamos la división *10:9*

Doble	*Doble*	
1	*9*	
2	*18 (> 10)*	*Terminar*

Por lo tanto

Cociente: 1
Resto: 10 − 9=1

Aplicando el inciso *1*) de la Propiedad *3.15* resulta

$$10 \times \frac{1}{9} = 1 + 1 \times \frac{1}{9} = 1 + \frac{1}{9}$$

Es decir

$$10 \times \frac{1}{9} = 1 \frac{1}{9}$$

Etapa 2

Al valor del diámetro se le resta el resultado obtenido en la Etapa *1*:

$$10 - 1 \frac{1}{9}$$

Es decir, se calcula

$$10 - \left(1 + \frac{1}{9}\right) = 10 - 1 - \frac{1}{9} = 9 - \frac{1}{9}$$

Nuestro problema se traduce entonces en calcular

$$9 - \frac{1}{9}$$

Como en la parte *Forma de su procedimiento* no se explicita ningún procedimiento para la resta entre un número natural y una fracción, la técnica mediante la cual se realizaba esta operación se ha podido reconstruir gracias a otros papiros hallados. En base a estos documentos, haremos esta operación tal cual la realizaban los egipcios:
Multiplicamos la expresión a restar por el denominador de la fracción, que en este caso es *9*:

$$9 \times \left(9 - \frac{1}{9}\right) = 9 \times 9 - 9 \times \frac{1}{9} = 81 - 1 = 80$$

Es decir

$$9 \times \left(9 - \frac{1}{9}\right) = 80$$

A continuación multiplicamos por la fracción *1/9* y obtenemos

$$\frac{1}{9} \times 9 \times \left(9 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} \times 80$$

Luego

$$\left(9 - \frac{1}{9}\right) = 80 \times \frac{1}{9} \qquad \text{[I]}$$

Ahora bien, para calcular $80 \times \frac{1}{9}$ efectuamos la división *80:9*, elaborando la tabla:

Doble	*Doble*	
1	*9*	
2	*18*	
4	*36*	
8	*72*	
16	*144 (> 80)*	*Terminar*

Entonces

Cociente: 8
Resto: 80 − 72 =8

Aplicando el inciso *1*) de la Propiedad *3.15* resulta

$$80 \times \frac{1}{9} = 8 + 8 \times \frac{1}{9} \qquad \text{[II]}$$

Para calcular $8 \times \frac{1}{9}$, hacemos uso de la *Tabla 2/n* y del inciso *4*) de la Propiedad *3.15*:

$$8 \times \frac{1}{9} = 2 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{9} = 2 \times 2 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{18} \right) = 2 \times \left(2 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{18} \right) = 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) =$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right) = 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

Por lo tanto

$$8 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \qquad \text{[IV]}$$

Sustituyendo [IV] en [III] obtenemos

$$80 \times \frac{1}{9} = 8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \qquad \text{[V]}$$

Finalmente, reemplazando [V] en [I] resulta

$$9 - \frac{1}{9} = 8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

Es decir

$$10 - 1\ \frac{1}{9} = 8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

Que transcripto como una yuxtaposición queda

$$10 - 1\ \frac{1}{9} = 8\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{18}$$

<u>*Etapa 3*</u>

Se halla el área de la base del granero. Para ello se multiplica por sí mismo el resultado obtenido en la *Etapa 2*. Es decir, se calcula

$$\left(8\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{18} \right) \times \left(8\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{18} \right)$$

Como

$$\left(8\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{18} \right) \times \left(8\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{18} \right) = \left(8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \right) \times \left(8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \right) =$$

$$= \underbrace{8 \times \left(8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \right)}_{\text{Primer término}} + \underbrace{\frac{2}{3} \times \left(8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \right)}_{\text{Segundo término}} + \underbrace{\frac{1}{6} \times \left(8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \right)}_{\text{Tercer término}} + \underbrace{\frac{1}{18} \times \left(8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \right)}_{\text{Cuarto término}}$$

Entonces el escriba resuelve primero cada término y luego los suma. Estos cálculos figuran en las nueve primeras filas de la tabla titulada *Forma de su procedimiento*.
Para facilitar la comprensión del procedimiento empleado en el papiro, organizaremos los datos y los cálculos en las siguientes tablas:

Primera Tabla: cálculo del primer término

						Técnica
1	*8*	*2/3*	*1/6*	*1/18*		*Inicialización*
2	*17*	*2/3*	*1/9*			*Duplicar la fila anterior*
4	*35*	*1/2*	*1/18*			*Duplicar la fila anterior*
\ 8	*71*	*1/9*				*Duplicar la fila anterior*

Total primer término: 71 1/9

Los datos contenidos en esta tabla se pueden corroborar en los siguientes cálculos auxiliares.

Cálculos auxiliares

Fila 2:

Aplicando los incisos *1*), *2*), *4*) y 5) de la Propiedad *3.15* obtenemos

$$2\times\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)=2\times 8+2\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{18}=16+4\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=$$

$$=16+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=17+\frac{2}{3}+\frac{1}{9}$$

Fila 3:

Aplicando los incisos *1*) y *6*) de la Propiedad *3.15*, junto con la *Tabla 2/n* obtenemos

$$=2\times\left(17+\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)=2\times 17+2\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{9}=34+4\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{9}=$$

$$=34+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=35+\frac{1}{2}+\frac{1}{18}$$

Fila 4:

Aplicando los incisos *4*) y 5) de la Propiedad *3.15*, resulta

$$2\times\left(35+\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\right)=2\times 35+2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{18}=70+1+\frac{1}{9}=71+\frac{1}{9}$$

Segunda Tabla: cálculo del segundo término

						Técnica
1	*8*	*2/3*	*1/6*	*1/18*		*Inicialización*
\2/3	*5*	*2/3*	*1/6*	*1/18*	*1/27*	*Multiplicar fila anterior por 2/3*

Total segundo término: 5 2/3 1/6 1/18 1/27

Cálculos auxiliares

Fila 2:

Aplicamos los incisos *1*) - 5) de la Propiedad *3.15*, junto con la *Tabla 2/n*:

$$\frac{2}{3}\times\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)=\frac{2}{3}\times 8+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{18}=16\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{18}=$$

$$=5+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}=5+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=5+\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=$$

$$=5+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}$$

Tercera Tabla: cálculo del tercer término

							Técnica
2/3	*5*	*2/3*	*1/6*	*1/18*	*1/27*		*Obtenido de la última fila de la Segunda Tabla*
1/3	*2*	*2/3*	*1/6*	*1/12*	*1/36*	*1/54*	*Multiplicar fila anterior por 1/2*
\1/6	*1*	*1/3*	*1/12*	*1/24*	*1/72*	*1/108*	*Multiplicar fila anterior por 1/2*

Total tercer término: 1 1/3 1/12 1/24 1/72 1/108

Cálculos auxiliares

Para el cálculo del tercer término aplicamos la *Técnica 2/3*, explicada en la pág.*53*, *y* aprovechando el cálculo del segundo término. Es decir,

$$\frac{1}{6}\times\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{2}{3}\times\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)}_{\text{Calculado en la segunda Tabla}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(5+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}\right)$$

Fila 1:

Se obtuvo de la Segunda Tabla, cuando calculamos el segundo término.

Fila 2:

Aplicamos los incisos *1*), 3) y 7) de la Propiedad *3.15*, junto con *la Tabla de productos de 2/3:*

$$\frac{1}{2}\times\left(5+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}\right)=\frac{1}{2}\times 5+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{18}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{27}=$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{54}=2+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{54}$$

Fila 3:

Aplicamos los incisos 2), 3), 4) y 5) de la Propiedad *3.15:*

$$\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{54}\right)=\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{36}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{54}=$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}+\frac{1}{108}$$

Cuarta Tabla: cálculo del cuarto término

							Técnica
1/6	*1*	*1/3*	*1/12*	*1/24*	*1/72*	*1/108*	*Obtenida de la última fila de la Tercera Tabla*
\1/18	*1/3*	*1/9*	*1/36*	*1/72*	*1/216*	*1/324*	*Multiplicar fila anterior por 1/3*

Total cuarto término: 1/3 1/9 1/36 1/72 1/216 1/324

Cálculos auxiliares

El cuarto término se calcula aprovechando el cálculo del tercer término, es decir,

$$\frac{1}{18}\times\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)=\frac{1}{3}\times\underbrace{\frac{1}{6}\times\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)}_{\text{Calculado en la tercera tabla}}=\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}+\frac{1}{108}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{24}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{72}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{108}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}+\frac{1}{216}+\frac{1}{324}$$

Finalmente, sumando los cuatro términos, obtenemos

$$\left(8\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{18}\right)\times\left(8\ \ \frac{2}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{18}\right)=71+\frac{1}{9}+5+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+$$

$$+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}+\frac{1}{108}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}+\frac{1}{216}+\frac{1}{324}=79+\frac{1}{108}+\frac{1}{324}$$

Etapa 4

Se calcula el volumen del granero, efectuando la operación

$$10\times\left(79+\frac{1}{108}+\frac{1}{324}\right)=10\times 79+10\times\frac{1}{108}+10\times\frac{1}{324}=790+10\times\frac{1}{108}+10\times\frac{1}{324}$$

El resultado de este cálculo se encuentra en las filas *10* y *11* de la tabla titulada *Forma de su procedimiento:*

					Técnica
1	*79*	*1/108*	*1/324*		*Inicialización*
\10	*790*	*1/18*	*1/27*	*1/54*	*Multiplicar fila anterior por 10*

Cálculo auxiliar

Cálculo de $10 \times \frac{1}{108}$

Aplicamos los incisos *4*) y *5*) de la Propiedad *3.15*, y la *Tabla 2/n*:

$$10 \times \frac{1}{108} = 5 \times 2 \times \frac{1}{108} = 5 \times \frac{1}{54} = (2 \times 2 + 1) \times \frac{1}{54} = 2 \times 2 \times \frac{1}{54} + \frac{1}{54} = 2 \times \frac{1}{27} + \frac{1}{54} =$$

$$= \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{54} = \frac{1}{18} + 2 \times \frac{1}{54} = \frac{1}{18} + \frac{1}{27}$$

Cálculo de $10 \times \frac{1}{324}$

$$10 \times \frac{1}{324} = 5 \times 2 \times \frac{1}{324} = 5 \times \frac{1}{162} = (2 \times 2 + 1) \times \frac{1}{162} = 2 \times 2 \times \frac{1}{162} + \frac{1}{162} = 2 \times \frac{1}{81} + \frac{1}{162} =$$

$$= \frac{1}{54} + \frac{1}{162} + \frac{1}{162} = \frac{1}{54} + 2 \times \frac{1}{162} = \frac{1}{54} + \frac{1}{81}$$

Por lo tanto

$$10 \times \left(79 + \frac{1}{108} + \frac{1}{324}\right) = 790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} + \frac{1}{81}$$

El escriba omitió la fracción *1/81* por considerarla un valor despreciable.

Etapa 5

El volumen del granero, que resultó igual a $\left(790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}\right)$ *codos*^{3}, es expresado en *khar*. Teniendo en cuenta que

$$1 \text{ codo}^3 = 1 \ \frac{1}{2} \text{ khar}$$

Entonces

$$\left(790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}\right) \text{codo}^3 = \left(790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}\right) \times \left(1 \ \frac{1}{2}\right) \text{khar} =$$

$$= \left(790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}\right) \times \left(1 \ + \frac{1}{2}\right) \text{khar} = \left(790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}\right) + \frac{1}{2} \times \left(790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}\right) \text{khar}$$

Considerando el inciso *4*) de la Propiedad *3.15* y la *Tabla 2/n* tenemos que

$$\left(790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}\right) + \frac{1}{2} \times \left(790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}\right) = 790 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} + 395 + \frac{1}{36} + \frac{1}{54} + \frac{1}{108} =$$

$$= 1185 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + 2 \times \frac{1}{54} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108} = 1185 + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108} =$$

$$= 1185 + \frac{1}{18} + 2 \times \frac{1}{27} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108} = 1185 + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108} =$$

$$1185 + 2 \times \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108} = 1185 + \frac{1}{9} + \frac{1}{54} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108}$$

El registro de este cálculo se encuentra en las filas *12* y *13* de la tabla titulada *Forma de su procedimiento:*

					Técnica
1	*790*	*1/18*	*1/27*	*1/54*	*Inicialización*
1/2	*395*	*1/36*	*1/54*	*1/108*	*Multiplicar fila anterior por 1/2*
Total suma	*1185*	*1/9*	*1/36*	*1/54*	*1/108*

Aquí el escriba omitió la parte fraccionaria de esta suma, considerando que la capacidad del granero es de *1185 khar*.

Etapa 6

La capacidad del granero, que resultó igual a *1185 khar*, es expresado ahora en *100-cuádruple-heqat.* Como

$$1\ khar = \frac{1}{20}\ 100\text{-}cuádruple\text{-}heqat$$

Entonces

$$1185\ khar = \frac{1}{20} \times 1185 \quad 100\text{-}cuádruple\text{-}heqat$$

Para calcular $\frac{1}{20} \times 1185$, se utiliza la *Técnica de Desdecuplicar (multiplicar por 1/10) y Desduplicar (multiplicar por 1/2)*, detallada en la pág. *52*. Luego, este producto se resuelve del siguiente modo:

$$\frac{1}{20} \times 1185 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times 1185$$

Los detalles de esta cuenta también se encuentran en las dos últimas columnas, debajo del título *Forma de su procedimiento:*

		Técnica
1	*1185*	*Inicialización. Esta fila no figura en el texto egipcio.*
1/10	*118 1/2*	*Multiplicar por 1/10 la fila anterior.*
\ 1/20	*59 1/4*	*Multiplicar por 1/2 la fila anterior*

Por lo tanto, la capacidad del granero es de *59 1/4 100-cuádruple-heqat.*

De este último problema expuesto, podemos afirmar que cuando los escribas egipcios necesitaban realizar cálculos complicados, recurrían a tablas prediseñadas. Sin embargo, no podemos concluir que todos los problemas podían resolverse rápidamente. Así, la Etapa *4* de este último ejemplo testimonia la dificultad que tenían para gestionar fracciones complejas, incluso con las tablas: el escriba, sencillamente, ha despreciado el último cuantavo, *1/81*.

Abandonaremos ahora a los escribas del valle del Nilo para interesarnos por sus contemporáneos de Mesopotamia. Analizaremos cómo trataban éstos su versión personal del problema de los graneros.

5.2 Análisis del texto babilónico

El texto corresponde a una tablilla que data del segundo milenio a.C. Fue hallada en la ciudad de Mari (Siria), situada a *400* km. de Babilonia. Por ese entonces Mari pertenecía al Imperio de Babilonia. El texto contiene un problema similar al texto egipcio. Se trata de un granero cilíndrico de *5 codos* de diámetro y *1 codo* de profundidad. Se busca hallar el volumen del granero, no en *codos cúbicos*, sino en la cantidad de granos de cebada que puede almacenar el granero.
Antes de analizar el texto, cabe mencionar que una de las unidades de capacidad más utilizadas en Mesopotamia era la *sila*, equivalente a aproximadamente *1* litro. Es decir,

$$1\ sila \cong 1\ litro$$

También existían otras unidades, a saber:

$$1\ siclo = 180\ granos\ (de\ cebada)$$
$$1\ sila = 60\ siclos$$

De estas dos últimas igualdades resulta que

$$1\ sila = 60 \times 180\ granos\ (de\ cebada) = 10800\ granos\ (de\ cebada)$$

Como *1* grano de cebada pesa aproximadamente *0.05 gramos* entonces en *1 sila* se puede almacenar $10800 \times 0.05 = 540\ gramos\ de\ cebada$. En consecuencia,

En un recipiente de 1 litro o de 1 sila de capacidad hay 540 gramos de cebada.

Fórmulas que aplicaban en Mesopotamia para hallar el volumen de un granero

Del texto babilónico se pudo deducir que, para calcular el volumen de un granero cilíndrico, aplicaban la siguiente fórmula, bien conocida por nosotros:

$$V = S \times h$$

Donde

V: Volumen del cilindro.
S: Área del círculo.
h: altura del cilindro.

Por otro lado, nosotros sabemos que el área del círculo se puede calcular en función de su perímetro, en base a las siguientes fórmulas:

$$P = \pi \times d$$
$$S = \frac{1}{4\pi} \times P^2$$

Donde

P: Perímetro del círculo.
d: Diámetro del círculo.

Sorprendentemente, los escribas mesopotámicos empleaban estas mismas fórmulas, pero reemplazando el número π (que desconocían) por el número *3*. Es decir, calculaban

$$P = 3 \times d$$
$$S = \frac{1}{12} \times P^2$$

Pero $1/12 \left(el\ recíproco\ de\ 12 \right)$ es *0;5* en el Sistema Sexagesimal Babilónico. En consecuencia, para hallar el volumen de un cilindro, en Mesopotamia aplicaban las siguientes fórmulas:

$$P = 3 \times d$$
$$S = 0;5 \times P^2$$
$$V = S \times h$$

Donde
d: Diámetro de la base *h: Altura del cilindro*

Cabe señalar que, según las investigaciones realizadas en *1969* por A.J. Smeur (véase Referencia [15]), en Mesopotamia ya se sabía que el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, es una constante cuyo valor aproximado es *3*.

Análisis del algoritmo empleado en el texto babilónico

Representamos las etapas sucesivas del texto babilónico bajo la siguiente forma simbólica:

Número de etapa	***Cálculo***	***Operación***
		Cálculo del volumen:
1	$3 \times 5 = 15$	*Multiplicación. Se calcula el perímetro de la circunferencia.*
2	$15^2 = 3:45$	*Cuadrado del perímetro*
3	$3:45 \times 0;5 = 18;45$	*Multiplicación; da por resultado el área de la base en codos^2*
4	$18;45 \times 1 = 18;45$	*Multiplicación; da por resultado el volumen del granero en codos^3*
		Conversión de codos^3 a silas:
5	$18;45 \times 6 = 1:52;30$	*Volumen del granero en silas (o litros): 1:52; 30 silas =1 panum, 5 sutum, 2 1/2 qum.*

En el texto se hace referencia a la palabra "*el igigubbum de*", y se refiere a la *constante* que figura en una determinada fórmula. Por ejemplo, al número *0;5* se lo llama *"el igigubbum del círculo",* ya que es la *constante* que figura en la fórmula del área del círculo. Veamos ahora cómo se obtienen los resultados de cada etapa del algoritmo, utilizando la aritmética mesopotámica:

Etapa 1

Se multiplica por *3* el diámetro del círculo, que en este caso es *5*. Es decir, se calcula el perímetro *P* del círculo:

$$P = 3 \times 5 = 15$$

Etapa 2

Se calcula el cuadrado del perímetro *P*, recurriendo a la Tabla de Cuadrados detallada en la pág. *70*. O bien se utiliza la Tabla de multiplicar por *15*. De este modo, se obtiene

$$P^2 = 15^2 = 3:45$$

Etapa 3

Se halla el área del círculo, efectuando el producto

$$P^2 \times 0;5 = (3:45) \times 0;5$$

En este caso, sólo en el segundo factor figura un "*punto y coma*", y hay *1* cifra sexagesimal después de él. Para hacer este cálculo, primeramente resolvemos $(3:45) \times 5$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 03 \quad 45 \\ \times \quad 5 \\ \hline 18 \quad 45 \end{array}$$

Luego,

$$(3:45) \times 5 = 18:45$$

A partir de este resultado, corremos "*el punto y coma*" *1* lugar hacia la izquierda. De este modo, obtenemos

$$(3:45) \times 0;5 = 18;45$$

Así, el área de la base del granero es igual a $18;45\ codos^2$.

Etapa 4

Se halla el volumen del granero cilíndrico. Para ello se multiplica el área de la base, cuyo valor se obtuvo de la *Etapa 3,* por la altura del granero, que en este caso es igual a *1 codo*. Por lo tanto

$$Volumen\ granero: 18;45\ codos^2 \times 1\ codo = 18;45\ codos^3.$$

Etapa 5

Se expresa el volumen del granero en términos de otra unidad, utilizada por los escribas para medir la capacidad de un recipiente para contener un grano: *la sila*. Como

$$1\ codo^3 = 6\ silas$$

Entonces

Volumen granero: $18;45\ codos^3 = 18;45 \times 6\ silas = 1:52;30\ silas$.

Cálculo auxiliar

Para calcular $18;45 \times 6$, primeramente resolvemos $(18:45) \times 6$

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{4} & & \\ & 18 & & 45 \\ & & \times & 6 \\ \hline & 1 & 52 & 30 \end{array}$$

Luego,

$$(18:45) \times 6 = 1:52:30$$

A partir de este resultado, corremos "*el punto y coma*" *1* lugar hacia la izquierda. De este modo, obtenemos

$$(18:45) \times 6 = 1:52;30$$

Ahora bien, como

$$\begin{cases} 1\ sila \cong 1\ litro \\ 60\ litros = 1\ panum \\ 10\ litros = 1\ sutum \\ 1\ litro = 1\ qum \end{cases}$$

Entonces, si expresamos el número sexagesimal *1:52;30* en nuestro sistema decimal resulta

$$1:52;30\ silas \cong 1:52;30\ litros = \left(1 \times 60^1 + 52 \times 60^0 + 30 \times 60^{-1}\right) litros =$$

$$= \left(60 + 52 + \frac{1}{2}\right) litros = \left(60 + 5 \times 10 + 2 + \frac{1}{2}\right) litros = 60\ litros + 5 \times 10\ litros + 2\ \frac{1}{2} litros =$$

$$= 1\ panum\ +\ 5\ sutum\ +\ 2\ \frac{1}{2}\ qum.$$

Observación

Teniendo en cuenta que

$$1:52;30\ silas \cong 1:52;30\ litros = \left(60 + 52 + \frac{1}{2}\right) litros = 112.5\ \ litros$$

Y que además en un recipiente de *1 litro* de capacidad se puede almacenar *540 gramos* de cebada, entonces el granero tiene una capacidad para almacenar

$$112.5 \times 540\ \ gramos = 60750\ gramos = 60{,}750\ kg.$$ de cebada.

Análisis del algoritmo babilónico: Caso general

Reescribiremos el algoritmo babilónico de forma más abstracta. Representaremos por *d* al diámetro del cilindro y por *h* a su altura (ambas medidas están expresadas en *codos*). De este modo, el texto babilónico se generaliza así:

Número de etapa	*Cálculo*	*Operación*
		Cálculo del volumen:
1	$3 \times d$	*Multiplicación. Se calcula el perímetro de la circunferencia.*
2	$(3 \times d)^2$	*Cuadrado del perímetro*
3	$(3 \times d)^2 \times 0;5$	*Multiplicación; da por resultado el área de la base en codos^2*
4	$(3 \times d)^2 \times 0;5 \times h$	*Multiplicación; da por resultado el volumen del granero en codos^3*
		Conversión de codos^3 a silas:
5	$(3 \times d)^2 \times 0;5 \times h \times 6$	*Volumen del granero en silas (o litros)*

Un balance sobre la metodología empleada por ambas civilizaciones

Como podemos comprobar, en el tratamiento de un mismo problema – el cálculo del volumen de un cilindro – las operaciones utilizadas por ambas civilizaciones son diferentes. El centro del problema consiste en determinar el área de la base, que es un círculo. Los egipcios utilizan la siguiente fórmula para hallar el área de un círculo de diámetro *d*:

$$\left(d - \frac{1}{9} \times d\right) \times \left(d - \frac{1}{9} \times d\right)$$

Los babilonios, en cambio, calculan dicha área aplicando la fórmula

$$(3 \times d)^2 \times 0;5$$

Hay ya, pues, diferencias considerables en la metodología empleada para resolver un problema. Pero la distinción más seria aparece en torno a las *técnicas*. Allí donde los egipcios aplican las técnicas fundamentales de duplicación, decuplicación, desduplicación y lo que hemos llamado la *Técnica 2/3*, los babilonios recurren a Tablas de productos, de recíprocos y de cuadrados.

Esta diferencia de técnicas tiene un alcance considerable en lo que respecta a sus consecuencias tanto pedagógicas como conceptuales.

Ya que, para cada técnica, hay cálculos fáciles y cálculos complicados. En el caso de Egipto, podemos comprobar que las técnicas para multiplicar y dividir son sencillas. Pero estas técnicas conducen rápidamente a números fraccionarios, es decir, a cuantavos. Y operar con fracciones tiene para ellos su grado de dificultad. Los egipcios resolvían esta situación construyendo tablas, para copiar de ellas el resultado necesario y así no haya que efectuar los cálculos difíciles más de una vez.

Para los babilonios, en cambio, las técnicas para multiplicar y dividir son más complicadas que las egipcias. Aquí es, por tanto, donde cobra sentido el uso de tablas, como las *Tablas de multiplicar* y la *Tabla de recíprocos*, que facilitan notablemente el trabajo. Por otro lado, el Sistema Sexagesimal les permite trabajar con fracciones de una manera más sencilla. Pero el sistema es eficiente cuando se emplean técnicas cuyos resultados tienen una expresión sexagesimal finita. Por ejemplo, la técnica para hallar el recíproco de un número puede dar lugar a un número que no tiene representación sexagesimal finita (como es el caso de *1/7*). En estos casos, se halla una aproximación sexagesimal finita del número, lo que puede provocar errores de cálculo.

Podemos afirmar entonces que ambas civilizaciones han dado nacimiento, de manera independiente, al uso de tablas para facilitar las técnicas de cálculo.

Conclusión

La Matemática y la Escritura nacieron al mismo tiempo y sus destinos han estado estrechamente entrelazados debido a las necesidades materiales de una sociedad, como por ejemplo, la necesidad de guardar registros de transacciones comerciales, de medir, dividir y repartir.

En este Trabajo Final hemos mostrado cómo estas necesidades surgieron primeramente en la Antigua Mesopotamia a principios del cuarto milenio a.C. y más tarde en Egipto, a fines del cuarto milenio.

Posteriormente, a comienzos del segundo milenio a.C., tanto en Mesopotamia como en Egipto habían desarrollado una Matemática práctica y empírica, basada en dos Sistemas de Numeración: el Sexagesimal Mesopotámico y el Decimal Egipcio.

La influencia del Sistema Sexagesimal fue tal, que hasta el día de hoy perduran rastros de él. Por ejemplo, cuando medimos el tiempo o los ángulos.

Hemos explicado de qué manera, en ambas civilizaciones, se efectuaban las operaciones aritméticas básicas y cómo resolvían matemáticamente algunos problemas provenientes de situaciones de la vida real. Sus algoritmos y técnicas fueron los cimientos de la Matemática que empleamos en la actualidad.

Si bien en ambas civilizaciones no desarrollaron demostraciones matemáticas, sus logros dieron el puntapié inicial para que en Grecia naciera la Matemática Teórica.

En este Trabajo Final hemos desarrollado también numerosos ejemplos que explican detalladamente, paso a paso, el modo con que los egipcios y mesopotámicos efectuaban las operaciones aritméticas.

Creemos que esto servirá de incentivo para incursionar en el apasionante mundo de la Matemática Antigua y comprender el proceso evolutivo del conocimiento humano.

Referencias

[1] James Ritter. *A cada uno su verdad: las matemáticas en Egipto y en Mesopotamia*. Historia de las Ciencias. Ed. Cátedra. Madrid. (1989), pág. 51-75.

[2] *Cuaderno de cultura científica*. https://culturacientifica.com/2018/10/31/el-origen-de-la-escritura-de-los-numeros/

[3] Georges Ifrah. *Historia universal de las cifras.* Ed. Espasa. Madrid (2002).

[4] Carlos Maza Gómez. *Matemática en Mesopotamia*. Ed. Matemática Educativa. Madrid (2007)

[5] James Ritter. *Entre el Nilo y el Éufrates. Las fuentes del número*. El Correo de la Unesco. (Noviembre 1989), pág.12-17.

[6] Ana Martos Rubio. *Breve historia de los sumerios*. Ed. Nowtilus. Madrid (2005).

[7] *El origen de la escritura de los números*. https://culturacientifica.com/2018/10/31/el-origen-de-la-escritura-de-los-numeros/

[8] *Los orígenes de la escritura*. Universidad de Cantabria. http://www.mj2artesanos.es/blog/los-origenes-de-la-escritura-ii-la-escritura-cuneiforme/

[9] Samuel Kramer. *La Historia empieza en Sumer*. Ed. Orbis. Barcelona (1985).

[10] Samira Abdel Masih. *Siria Histórica, Cuna de la Ciencia*. Ed. Universidad Abierta Interamericana. Buenos Aires (2004).

[11] Rojo, Armando. *Álgebra I*. Ed. El Ateneo. Buenos Aires (1982).

[12] James Stewart. *Cálculo*. Ed. Thomson. México (2001).

[13] *Los egipcios y las fracciones. Papiro de Ahmés.* Miguel Álvaro Pérez. https://www.youtube.com/watch?v=s_QM8VOsRxk

[14] R. J. Gillings. *Mathematics in the time of the Pharaohs.* Ed. Dover. New York (1972).

[15] Smeur, A.J. *On the value equivalent to π in ancient mathematical text. A new interpretation.* Archive for History of Exact Sciences, 6, 249-270. (1969).