**SEMINARIO TALLER DE INTEGRACIÓN II**

**TRABAJO FINAL**

# *EL CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN: Dificultades en la construcción del concepto y su análisis desde la teoría APOE*

Corina Soledad Agüera

Profesorado Universitario en Matemática
Facultad de Tecnología Informática

Tutoras:

Dra. Camos, Cristina
Universidad Abierta Interamericana
Lic. Casetta, Inés
Universidad Abierta Interamericana

## ***Introducción***

El concepto de derivada, las dificultades en su aprendizaje, en desprenderse del mero mecanismo atraviesa a su enseñanza y consecuentemente ha sido elevado a la superficie por los teóricos de la Didáctica de la Matemática.

Atendiendo a estas ideas me introduje en la búsqueda de artículos y publicaciones que aportan conceptos y argumentos para comprender específicamente las dificultades del alumno en la construcción de ese concepto. En ese proceso y con el tamiz de mi interés en la teoría APOE que describe la manera en que los alumnos aprenden o construyen mentalmente los conceptos matemáticos a partir de estructuras previas elegí el siguiente artículo: *"Dificultades en la comprensión del concepto derivada de una función",* (Pereyra, 2020).

Los autores son profesores, licenciados, magister e investigadores en Enseñanza de la Matemática en la Universidad Nacional de Catamarca.

En dicho artículo, se da cuenta de un proceso de investigación fundamentado en la teoría APOE a través de una metodología cualitativa, de tipo descriptivo y utilizando estudio de casos. Se trata de una primera etapa en la que, fundamentando en la descomposición genética, se han determinado las principales dificultades en la construcción del concepto de derivada.

En la sección 1 de este trabajo **Teoría desde las líneas didácticas,** expongo algunos conceptos, en una síntesis muy breve, desde la perspectiva de la didáctica francesa. Luego, presentó los conceptos centrales de la teoría APOE.

En la sección 2 bajo el título: ***Análisis bajo fundamentaciones de la teoría APOE, de las resoluciones de ejercicios otorgados a estudiantes,*** abordaré justamente las elaboraciones de los alumnos propuestas en el artículo seleccionado.

Finalmente, elaboro algunas conclusiones sobre mi intervención de estudio en este artículo.

***Desarrollo***

### *1 Teoría desde las líneas didácticas.*

### *1.1. Primeros acercamientos*

El análisis de Pereyra y Herrera se basa en los estudios de distintos autores en el campo de la Didáctica de la Matemática. Existe acuerdo entre ellos sobre que el alumno logra especialmente la aplicación mecánica de la derivada, pero no puede aproximarse a la resolución de problemas complejos. Es decir, su relación con la derivada es básicamente aplicar reglas, realizar procesos algorítmicos, en algunos casos identifica la derivada con la recta tangente. Finalmente, esos recursos esencialmente procedimentales los pone en equivalencia con el concepto de derivada.

La enseñanza de este concepto ha sido estudiada por diversos autores desde distintas líneas didácticas.

Consideraré en principio las conceptualizaciones sobre la enseñanza de la Matemática dentro de la didáctica francesa. Guy Brousseau se centra en la enseñanza de los conceptos matemáticos desde una concepción constructivista y en el desarrollo de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) asume que el aprendizaje se logra por adaptación del sujeto al medio. Artigue (1995) sobre la enseñanza de la derivada, sostiene que es posible enseñar a los alumnos a resolver cálculos de derivadas y problemas estandarizados con procesos más o menos mecánicos, pero suelen tener dificultades cuando necesitan trabajar con su expresión analítica, como límite del cociente incremental o con su interpretación geométrica. Sostiene en este mismo sentido que la cuestión así manifestada tiene un anclaje en que no han podido construir un significado adecuado del concepto de derivada.

Dentro de la didáctica francesa y en relación con el aprendizaje del alumno se desarrollaron importantes ideas teóricas: *esquema, campo conceptual y el de cambio de estatus de los conocimientos en relación con los significantes.*

El concepto de *esquema* hace referencia a la organización invariable de la conducta para una situación determinada. Los esquemas funcionan como totalidad en los que se ponen en juego: objetivos y anticipaciones, reglas de acción, constantes operatorias e inferencias.

El aporte teórico de Gérard Vergnaud, *campos conceptuales* hace referencia a un conjunto de situaciones que para ser tratadas necesita vincular esquemas, conceptos y teoremas e incorporar representaciones lingüísticas y simbólicas para expresarlos.

La elaboración teórica respecto del *cambio de estatus de los conocimientos por los significantes* se explica considerando que los símbolos lingüísticos o los símbolos que representan los objetos matemáticos son fundamentales para el aprendizaje. Desde la mirada de Vigotsky (1985) el lenguaje es el principal medio para favorecer los procesos de aprendizaje.

Desde esas elaboraciones teóricas sabemos que en el proceso de aprendizaje el alumno es expuesto a diferentes situaciones para las cuales construye esquemas que le resulten importantes, realiza representaciones y algoritmos internos, es decir procesa la información y compara las operaciones mentales antes de dar una respuesta algebraica. En ese proceso el alumno elige alguna estrategia de resolución y la expresa mediante una representación simbólica numérica, algebraica, gráfica y/o lingüística.

Los conceptos matemáticos se conforman como un sistema, forman parte de una estructura, utilizan su propio lenguaje y escritura. Trabajando con ellos el sujeto obtiene conocimiento, capacidad de reflexión, de relación y de transformación.

### *1.2 Las ideas de la teoría APOE*

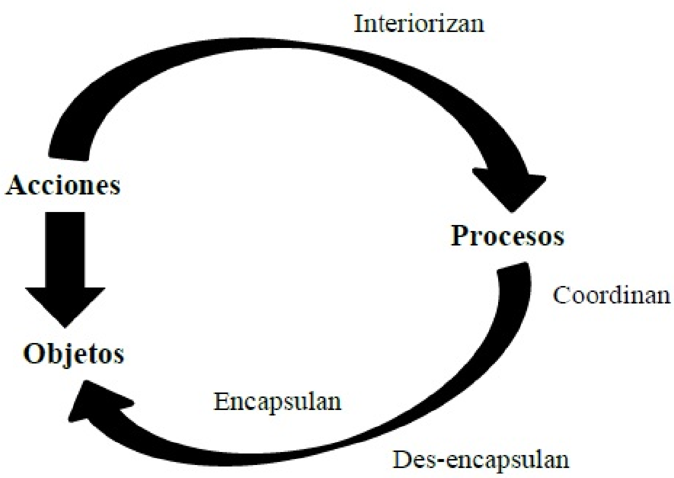
La teoría didáctica APOE, fue desarrollada por Eduard Dubinsky y se basa en la idea fundamental de abstracción reflexiva de Piaget para la construcción del conocimiento. Es el principio de acciones, procesos, objetos y esquemas, que describe como aprenden los estudiantes. Es decir, analiza las estructuras y mecanismos mentales de un individuo al construir el concepto o noción matemática. Luego aplicando acciones y procesos lo transforma dando lugar a la construcción de un nuevo concepto.

Esta relación fue denominada por Dubinsky como sistema de retroalimentación circular o cíclica, la construcción de un <u>objeto</u> matemático inicia cuando el estudiante toma los objetos previos; los manipula mediante las <u>acciones</u> que puede realizar sobre él. Estas acciones al ser interiorizadas por el individuo son estructuradas en <u>procesos</u> que posteriormente son encapsulados para formar objetos. Los cuales pueden desencapsularse para regresar sobre el proceso que le dio origen y generar uno nuevo. Por último, todo esto lo organiza en <u>esquemas</u>.

Una cuestión importante en esta teoría es que cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, ésta puede ser interiorizada en un proceso mental. Si lo aplicamos al estudio de resolución de derivadas el estudiante tiene más de un trabajo de reflexión, construcción e interiorización.

El alumno actúa sobre el objeto de estudio, y/o lo relaciona con otros objetos, reflexiona, y organiza los pensamientos y le otorga en un marco intelectual a esta información. Para lograr este recorrido como proceso, deberá poner en práctica construcciones cognitivas adquiridas en el aprendizaje, es decir, que pondrá en práctica herramientas utilizadas en resoluciones anteriores, aplicando contenidos como saberes previos. El estudiante se verá frente a una pregunta abstracta, y buscará la manera de dar una respuesta concreta.

Si analizamos el proceso detallado en los párrafos anteriores con los fundamentos de la teoría APOE se puede identificar lo que se denomina ruptura en el proceso de interiorización y encapsulación.




El sujeto actúa sobre el objeto de estudio, y/o lo relaciona con otros objetos, reflexiona, y organiza los pensamientos y le otorga en un marco intelectual a esta información. Este proceso es gradual.

Un ejemplo de esto es la siguiente resolución, donde el alumno debe encapsular el proceso de derivada como objeto.

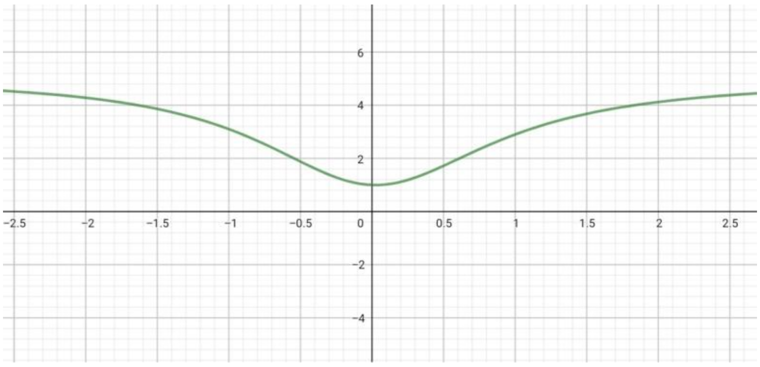
Actividad:

Realiza la gráfica de una función derivable que satisfaga las siguientes condiciones y tenga $x = 1$ como único punto critico.

$f'(x) < o$ para $x < 1$ ; $f'(x) > 0$ para $x > 1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 5$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$

Respuesta:




Aquí el estudiante primeramente recurre a ideas sobre los conceptos involucrados en la consigna: definición de punto crítico, cuándo una función es derivable y en dónde, definición de asíntota. Luego hace una reconstrucción de su conocimiento, como resultado de la reflexión sobre el problema planteado. De esta manera puede reestructurar su cognición mediante una reorganización de las estructuras: función derivable, límite finito cuando x tiende a infinito, punto crítico, para luego asimilar un nuevo conocimiento.

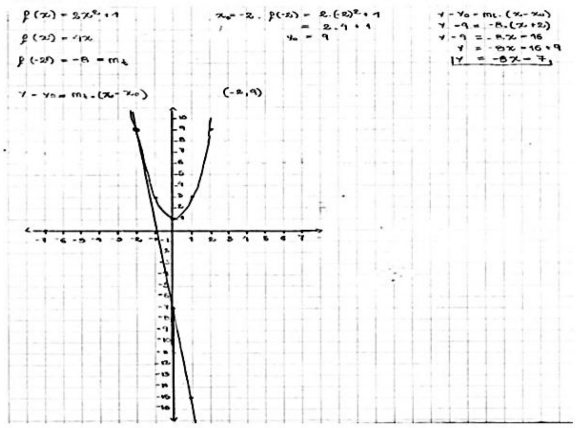
Entonces reflexiona, transforma, e interactúa con el objeto mediante *esquemas*, procede a la *interiorización* en un proceso mental. Los *esquemas* son un conjunto de estructuras mentales, acciones, procesos, objetos.

Luego el individuo debe transformar al objeto para poder resolver una situación, este proceso se denomina *encapsulación*, es la conversión del proceso, construcción dinámica, en un objeto, construcción estática. Puede construir más de un proceso con lo cual mediante el mecanismo de la *coordinación* unifica y encapsula un único proceso. En el caso de que sea necesario se podrá revertir un proceso dando origen a uno nuevo, *reversión*.

## 2 *Análisis bajo fundamentaciones de la teoría APOE, de las resoluciones de ejercicios otorgados a estudiantes*

### 2.1 Análisis de la resolución Item 1.

Dada la siguiente función, se pide determinar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = 2x^2 + 1 \; en \; x = -2$, graficar la función $f(x)$ y su recta tangente.

| Descomposición genética lograda | Descomposición genética no lograda |
|---|---|
| <br>El estudiante para determinar la recta tangente, necesita considerar el objeto recta y en particular el objeto recta tangente a una curva.<br>Para ello debe calcular la pendiente, para luego poder relacionar los datos obtenidos y graficar dicha recta.<br>Estamos frente a un proceso de interiorización. El alumno tiene el control sobre sus acciones, tiene la capacidad de imaginar el paso a paso, construye un proceso y reflexiona sobre sus acciones poniendo en juego saberes previos.<br>trascripción de la imagen:<br>$f(x) = 2x^2 + 1; f(x) = 4x \; ; f(-2) = -8 = m_t$<br>$x_0 = -2; f(-2) = 2.(-2)^2 + 1 = 2.4 + 1; \; x_0 = 9$<br>$y - y_0 = m_t.(x - x_0) \qquad (-2:9)$<br>$y - 9 = -8.(x + 2)$<br>$y - 9 = -8x - 16$<br>$y = -8x - 16 + 9$<br>$y = -8x - 7$ | Algunos estudiantes tienen dificultades de comprensión del concepto de derivada de una función, pues no logran coordinar los procesos gráficos y analíticos de la definición de derivada de una función, es decir que no logran interiorizar el proceso la acción de calcular la derivada de una función en un punto utilizando la definición. |

### 2.2 Análisis de la resolución Item 2

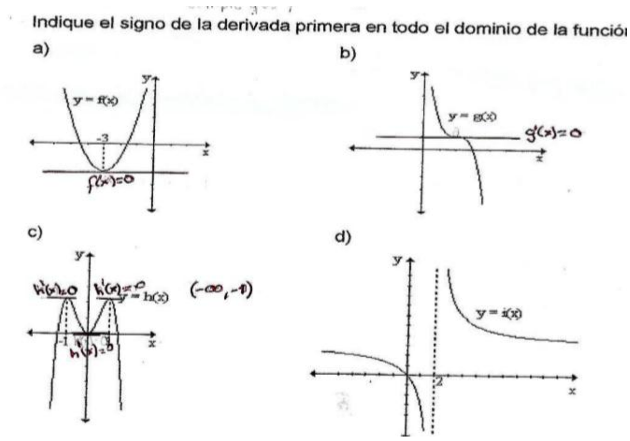
Calcule la función derivada, utilizando la definición: $f(x) = mx^2 + bx$.

| Descomposición genética lograda | Descomposición genética no lograda |
|---|---|
| $f(x) = mx^2 + bx$<br>$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = f'(x)$ si el límite existe<br>$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(m(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) - [mx^2 + bx])}{\Delta x}$<br>$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[m(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + bx + b\Delta x - mx^2 - bx]}{\Delta x}$<br>$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{mx^2 + 2mx\Delta x + \Delta x^2 m + bx + b\Delta x - mx^2 - bx}{\Delta x}$<br>$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2mx\Delta x + \Delta x^2 m + b\Delta x}{\Delta x}$<br>$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2mx + \Delta x m + b)}{\cancel{\Delta x}}$<br>$= \lim_{\Delta x \to 0} [2mx + \Delta x m + b]$<br>$\boxed{f'(x) = 2mx + b}$<br><br>El estudiante debe coordinar dos procesos ya construidos, representación gráfica y calculo analítico, para dar lugar a una nueva acción que es calcular la derivada en un punto del dominio.<br>Necesariamente mediante la coordinación deberá partir de dos procesos para lograr construir un único proceso que pueda ser encapsulado.<br>Por lo tanto, es imprescindible realizar cada proceso correctamente para lograr uno nuevo y llegar a la respuesta correcta.<br><br>$f(x) = mx^2 + bx$<br>$f(x+\Delta x) = m(x+\Delta x)^2 + b.(x+\Delta x)$<br>$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{[m.(x+\Delta x)^2 + b.(x+\Delta x)] - (mx^2 + bx)}{\Delta x}$<br>$= \frac{m(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + bx + b\Delta x - bx - mx^2}{\Delta x}$<br>$= \frac{\cancel{mx^2} + 2mx\Delta x + m\Delta x^2 + \cancel{bx} + b\Delta x - \cancel{bx} - \cancel{mx^2}}{\Delta x}$<br>$= \frac{\cancel{\Delta x}(2mx + m\Delta x + b)}{\cancel{\Delta x}}$<br>$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2mx + m\Delta x + b$ | En este caso encontramos que no todos los alumnos han podido comprender la definición de derivada, no logra calcular correctamente el límite pedido.<br>Con lo cual podemos afirmar que no logra reflexionar y no detecta que es necesario completar el procedimiento realizado. Por lo tanto no culmina la etapa de interiorización y coordinación en consecuencia no se lleva a cabo la etapa de encapsulación |

### 2.3 Análisis de la resolución Item 3

Analice para qué funciones se verifica que su derivada en $x = x_0$ es nula y trace la recta tangente a la curva en el punto donde su derivada es nula.

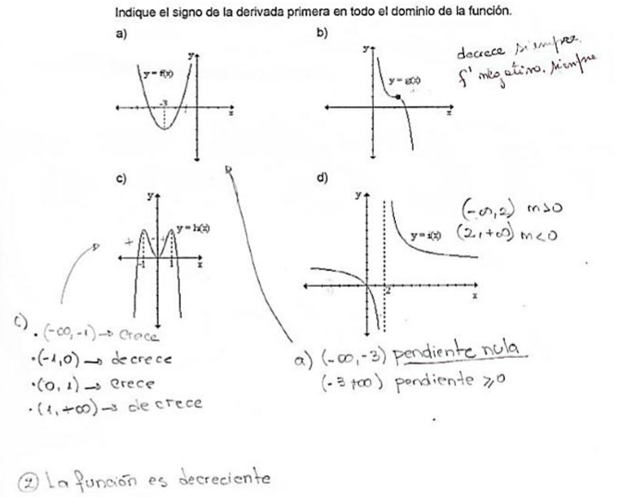
Este ítem nos va a permitir comprobar si logró realizar estos primeros pasos.

| Descomposición genética lograda | Descomposición genética no lograda |
|---|---|
| El alumno logra integrar a los objetos en esquemas, esto se puede observar en la coordinación entre la representación gráfico y analítico de la derivada en función de un punto o cuando realizan el análisis completo de la función.<br>Logra concluir con el proceso más importante para la teoría APOE que es la encapsulación porque el alumno logra mediante la observación de los gráficos propuestos identificar los puntos del dominio donde la función es nula, y estable relaciones entre las funciones $f(x) y\, f`(x)$ y luego realiza un gráfico aproximado de su razonamiento | <br>Algunos alumnos han tenido dificultades en establecer una relación entre los puntos del dominio donde la derivada es nula y las funciones $f(x) y\, f`(x)$, esto nos lleva a concluir que no han podido encapsular en un objeto la definición de derivada.<br>Si bien encuentran las puntos del dominio pero no los relaciona con el concepto en cuestión. |

### 2.4 Análisis de la resolución Item 4

¿En qué gráficas se cumple que f´(x) < 0? ¿Cómo se comporta la función en ese intervalo? Justifique e item5: Indique el signo de la derivada primera en todo el dominio de la función y en base a ello, indicar el comportamiento de la misma.

Cabe aclarar que dicha consigna tiene vínculo con el análisis del ítem 3

<table>
<tr><td>Descomposición genética lograda</td><td>Descomposición genética no lograda</td></tr>
<tr><td>El estudiante logra exitosamente los procesos de interiorización, encapsulación y coordinación, ya descriptos, para poder analizar y estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento, determinar de puntos críticos, y llegar al trazado aproximado de la función f.<br>Será un proceso fundamental la relación de conceptos e involucrar el concepto de derivada, y apelar al desarrollo de la coherencia para determina qué esquema es necesario aplicar.<br>Al igual que el ítem 3 recurrirá a la observación para identificar puntos del dominio donde la función es nula y establecer relaciones entre $f(x) y\ f`(x)$</td><td>

En algunos alumnos hemos podido observar que tienen un conocimiento parcial del concepto derivada, se detectan inconvenientes en la coordinación de los cálculos analíticos y la representación gráfica de la función. Además, no pueden identificar los puntos donde la derivada es nula.<br>Podemos afirmar que el proceso de interiorización esta logrado, pero no es así en el caso de los procesos posteriores de la descomposición genética, ya que reconoce los intervalos de crecimiento y decrecimiento pero no concluye relacionándolos con $f(x) y\ f`(x)$.</td></tr>
</table>

## *Conclusiones bajo mi intervención de estudio en el artículo*

Bajo los fundamentos de la teoría APOE, he analizado si los alumnos han logrado o no cada etapa de la descomposición genética propuesta por los autores.

Consideré en principio los logros de los alumnos en relación con el concepto Derivada, y busqué determinar cuáles son las dificultades predominantes a la hora de construir un concepto matemático.

He observado que, en la fase de experimentación los estudiantes recurren constantemente a saberes previos, algunos poseen las herramientas suficientes para construir una asociación entre ellos y realizar una construcción gráfica aproximada, en ese proceso emplearon el concepto de función, el concepto de recta tangente, y el cálculo de derivada de una función.

Otros han podido encapsular en objeto el concepto "derivada" de forma analítica calculando el cociente incremental entre los puntos dados, utilizando las diferentes posiciones, y haciendo un análisis completo de una función, utilizando el cálculo de límite.

Me resultó muy interesante adentrarme en las dificultades respecto del concepto de derivada, desde un análisis dinamizado por la teoría APOE que indaga en la descomposición genética con sus tres construcciones mentales: acción, proceso, objeto.

Este recorrido de estudio, me posiciona en una perspectiva de avanzar en profundidad tanto en la teoría APOE como en el concepto de derivada desde esta línea, pero también para estudiar otros conceptos que suelen indicarse "de difícil comprensión".

Bibliografía:

Pereyra, N. E. (diciembre de 2020). Dificultades en la comprensión del concepto derivada de una función. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 48-58.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comps.) (2012). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires: UNGS-EDUVIM.

Rodríguez, M. (comp.) (2016). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Buenos Aires: UNGS.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En: H. Aliaga, A. Bressan y P. Sadovsky (Eds.) *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (pp. 13-65) Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Vergnaud, G. (Coord.) (1997). *Aprendizajes y Didácticas: ¿Qué hay de nuevo?*. Buenos Aires: Edicial.